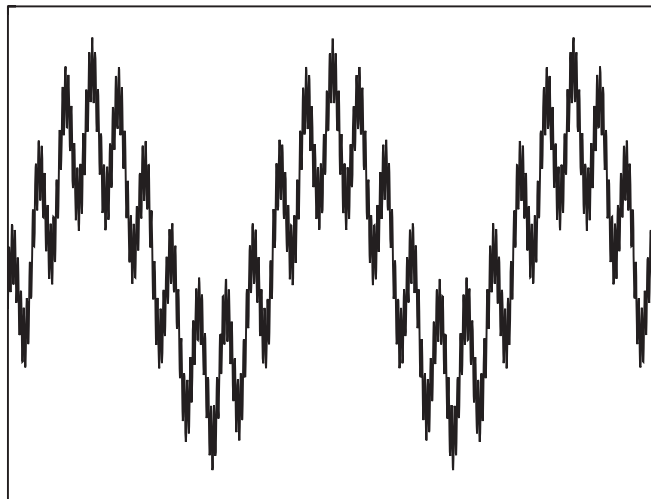


UNIVERSITEIT GENT
FACULTEIT WETENSCHAPPEN



ANALYSE I

Prof. J. Vindas
Editie 2015-2016

Analyse I behandelt

Functies van één reële veranderlijke.

Met dank aan Prof. C. Impens (en Prof. H. Vernaeve) voor het ter beschikking stellen van de tekst waarop deze cursus gebaseerd is. De fouten die deze editie ongetwijfeld bevat, zijn met grote waarschijnlijkheid te wijten aan wijzigingen aangebracht door de auteur. Gelieve ze te melden aan jvindas@cage.UGent.be.

De figuur op de voorpagina toont de beeldlijn $y = \frac{\cos(13\pi x)}{2} + \frac{\cos(169\pi x)}{4} + \frac{\cos(2197\pi x)}{8}$ en geeft een goed beeld van het z.g. *monster van Weierstrass* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(13^n \pi x)}{2^n}$, een functie die overal continu en nergens afleidbaar is.

Hoofdstuk 0

Inleiding

0.1 Notaties en definities

1. De verzameling van de elementen uit A waarvoor de eigenschap P geldt noteren we als $\{x \in A \mid P\}$ of als $\{x \in A : P\}$. We noteren $x \in A$ ook als $A \ni x$.
2. De notatie $A \subseteq B$ betekent dat elk element van A ook tot B behoort. Bij ons betekent $A \subset B$ dat $A \subseteq B$ en $A \neq B$; doorgaans gebruiken we hiervoor de explicietere notatie $A \subsetneq B$. De gelijkheid $A = B$ is gelijkwaardig met de combinatie van $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$.
3. Het **domein** of de **definitieverzameling** van een functie f is de verzameling

$$\mathcal{D}_f := \{x : f(x) \text{ is gedefinieerd}\}.$$

Verder noteren we voor een willekeurige verzameling A

$$f(A) := \{f(x) : x \in A \cap \mathcal{D}_f\}.$$

I.h.b. noemen we $f(\mathcal{D}_f) = \{f(x) : x \in \mathcal{D}_f\}$ de **waardenverzameling** (of **beeldverzameling** of kortweg het **beeld**) van f .

Een **nietnegatieve functie** f is een functie waarvan alle waarden nietnegatief zijn. We noteren dan $f \geq 0$.

4. Wij maken het volgende onderscheid tussen *functies* en *afbeeldingen*: een **functie** $f: A \rightarrow B$ heeft als domein een deelverzameling van A ; een **afbeelding** $f: A \rightarrow B$ heeft als domein A zelf. De mededeling ‘ f is een functie $A \rightarrow B$ ’ of ‘ f is een afbeelding $A \rightarrow B$ ’ leert over de waardenverzameling $f(A)$ enkel dat die een deelverzameling van B is. Wil men uitdrukken dat B samenvalt met de waardenverzameling, dan zegt men dat $f: A \rightarrow B$ **surjectief** is, en men schrijft dan bijv. $f: A \rightarrow B = f(A)$.
5. Een functie $f: A \rightarrow B$ is **injectief** als elke $y \in f(A)$ op ten hoogste één manier te schrijven is als $f(x)$, m.a.w. als $f(x_1) = f(x_2)$ impliceert dat $x_1 = x_2$. Een **bijjectie** of **bijjectieve afbeelding** $f: A \rightarrow B$ is een afbeelding die zowel injectief als surjectief is.
6. Is C een deel van het domein van f , dan noteren wij de **beperking** of **restrictie** van f tot C als $f|_C$ of $f|_C$. Dit is de afbeelding met C als domein en $f(x)$ als functiewaarde in $x \in C$.

7. Geheel in de traditie van de analyse gebruiken wij, als uit de context blijkt dat x de veranderlijke is, soms de notatie $f(x)$ voor de functie f . Uit de context moet dan blijken dat hiermee niet de functiewaarde van f in x bedoeld is, maar wel degelijk f zelf. Een volkomen ondubbelzinnige notatie voor f is: $x \mapsto f(x), \forall x \in A$. Soms gebruiken we ook de notatie $f(\cdot)$ i.p.v. f ; het punt (de ‘plaatshouder’) duidt aan waar de veranderlijke ingevuld moet worden om de functiewaarde te berekenen.

0.2 Elementen van logica

1. Negatie (‘niet’) noteren wij met $\neg$, disjunctie (‘of’) met $\vee$, conjunctie (‘en’) met $\wedge$, & of gewoon met een komma. We noteren ‘er bestaat’ met $\exists$ en ‘voor alle’ met $\forall$.

Als de **implicatie** $P \implies Q$ waar is, dan is haar **contrapositie** $\neg Q \implies \neg P$ eveneens waar. De contrapositie is een andere manier om hetzelfde uit te drukken.

Als $P \implies Q$, dan zegt men dat P **voldoende** is voor Q , en Q **nodig** voor P .

2. De negatie van $(\forall x)P(x)$ moet uitdrukken dat er minstens één uitzonderings- x bestaat, en is dus $(\exists x)\neg P(x)$. Om analoge redenen wordt de negatie van $(\exists x)P(x)$ gegeven door $(\forall x)\neg P(x)$. Vandaar de regel om de negatie van een ingewikkelde gekwantificeerde formule neer te schrijven: *vervang alle kwantoren $\forall$ door $\exists$ en omgekeerd, en sluit af met de negatie van de laatste (meest rechtse) deelformule.*

Een voorbeeld: de negatie van

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)(\forall x \in A)(\forall x' \in A)(|x' - x| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

is

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta_\varepsilon > 0)(\exists x \in A)(\exists x' \in A)(|x' - x| < \delta_\varepsilon \& |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon).$$

Om de negatie van de laatste deelformule te nemen, merken we op dat $(\forall x)(P(x) \implies Q(x))$ eigenlijk hetzelfde is als $(\forall x : P(x))Q(x)$. De negatie is dus $(\exists x : P(x))\neg Q(x)$, of nog: $(\exists x)(P(x) \& \neg Q(x))$.

3. Een belangrijk deel van de wiskunde bestaat uit het bewijzen van stellingen. De opgave van een stelling vermeldt het **gegeven**, d.w.z. een aantal veronderstellingen waarop het bewijs berust, en de **te bewijzen** eigenschap (kortweg: het te bewijzen). Een **bewijs** is een logische ketting die het te bewijzen afleidt uit het gegeven gecombineerd met eerder bewezen eigenschappen. Vanzelfsprekend mag men niet steunen op het te bewijzen of op verderop bewezen eigenschappen.
4. De notatie $:=$ betekent ‘is bij definitie gelijk aan’, en $=:$ staat voor ‘wat bij definitie gelijk is aan’. Het symbool $\square$ duidt het einde van een bewijs aan.

0.3 Nederlands

1. Het woord ‘zodat’ duidt een *gevolg* aan, bijvoorbeeld: ‘Kies $0 < \varepsilon < 1$, zodat $0 < \varepsilon^2 < 1$ ’. Een *voorwaarde* moet men anders uitdrukken, bijvoorbeeld: ‘Kies $\varepsilon > 0$ zo dat $0 < \sin \varepsilon < \frac{1}{5}$ ’ of, iets vlotter: ‘Kies een $\varepsilon > 0$ waarvoor $0 < \sin \varepsilon < \frac{1}{5}$ ’.
2. Men noemt een eigenschap of een redenering *triviaal* als ze, hoewel juist, niet de moeite is om bij stil te staan.

Hoofdstuk 1

Getallen

1.0.1 Definitie. Wij noemen het getal a **positief** als $a > 0$, en **negatief** als $a < 0$. Het getal 0 is noch positief noch negatief. Wij noemen het getal a **nietnegatief** als $a \geq 0$, en **nietpositief** als $a \leq 0$. Het getal 0 is tegelijk nietnegatief en nietpositief.

1.0.2 Notatie. Is G een verzameling getallen, dan noteren wij G^+ voor de deelverzameling bestaande uit de positieve elementen van G .

1.1 Natuurlijke, gehele en rationale getallen

De verzameling van de natuurlijke getallen noteren we d.m.v.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Overeenkomstig de algemene notaties is dan

$$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \dots\}.$$
¹

Een van de axioma's van de natuurlijke getallen kan als volgt geformuleerd worden: *als $P(n)$ een formule is die afhangt van het natuurlijk getal n , en als de volgende twee formules waar zijn:*

$$(a) \ P(0)$$

$$(b) \ (\forall n \in \mathbb{N})(P(n) \implies P(n+1)),$$

dan is de formule $P(n)$ waar voor alle $n \in \mathbb{N}$.

De werkwijze om de formule $(\forall n \in \mathbb{N})(P(n))$ in die twee stappen (a) en (b) te bewijzen heet **volledige inductie**. In de praktijk past men volledige inductie vaak informeler toe: men bewijst $P(0)$, dan $P(1)$ op grond van $P(0)$, eventueel nog $P(2)$ op grond van $P(1)$, en men ziet (stilzwijgend) in hoe men op analoge wijze algemeen $P(n+1)$ uit $P(n)$ moet afleiden.

Uit de axioma's van de natuurlijke getallen volgt ook

1.1.1 Stelling. *Elke nietlege verzameling van natuurlijke getallen heeft een kleinste element.*

¹Dat $0 \in \mathbb{N}$ is een conventie die niet door alle auteurs gevolgd wordt. Enigszins verwarrend wordt de notatie $\mathbb{N}_0$ zowel gebruikt voor $\mathbb{N}^+$ (door auteurs voor wie $0 \in \mathbb{N}$) als voor $\mathbb{N}$ (door auteurs voor wie $0 \notin \mathbb{N}$).

De verzameling van de gehele getallen noteren we d.m.v.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

en de verzameling van de rationale getallen d.m.v.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

De verzameling $\mathbb{Q}$ van de rationale getallen, de relatie $<$ tussen rationale getallen, de optelling $+$ en de vermenigvuldiging $\cdot$ van rationale getallen vormen samen een structuur die men een **geordend veld** noemt. Algemeen wordt een ‘geordend veld’ $(F, <, +, \cdot)$ vastgelegd door de volgende eigenschappen, waarin $0, 1, <, +, \cdot$ niet de familiaire betekenis hoeven te hebben.

1. *Eigenschappen van de verzameling F .*

- $0 \in F$.
- $1 \in F$.
- $0 \neq 1$.

2. *Eigenschappen van $<$.*

- Voor geen enkele $a \in F$ geldt: $a < a$.
- Voor alle $a, b \in F$ geldt: als $a \neq b$, dan is hetzij $a < b$ hetzij $b < a$.
- Voor alle $a, b, c \in F$ geldt: als $a < b$ en $b < c$, dan is $a < c$.

3. *Eigenschappen van $+$.*

- Voor alle $a, b \in F$ geldt $a + b \in F$.
- Voor alle $a, b \in F$ geldt $a + b = b + a$.
- Voor alle $a, b, c \in F$ geldt $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- Voor elke $a \in F$ geldt $a + 0 = a$.
- Als $a \in F$, dan bestaat er een $-a \in F$ waarvoor $a + (-a) = 0$.

4. *Eigenschappen van $\cdot$.*

- Voor alle $a, b \in F$ geldt $a \cdot b \in F$.
- Voor alle $a, b \in F$ geldt $a \cdot b = b \cdot a$.
- Voor alle $a, b, c \in F$ geldt $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- Voor elke $a \in F$ geldt $a \cdot 1 = a$.
- Als $a \in F \setminus \{0\}$, dan bestaat er een $\frac{1}{a} \in F$ waarvoor $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$.

5. *Verbindingseigenschappen.*

- Voor alle $a, b, c \in F$ geldt: als $a < b$, dan is $a + c < b + c$.
- Voor alle $a, b \in F$ geldt: als $0 < a$ en $0 < b$, dan is $0 < a \cdot b$.
- Voor alle $a, b, c \in F$ geldt $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

1.1.2 Notatie. Men gebruikt meestal de lichtere notaties

$$\begin{aligned} a + b + c &:= (a + b) + c, & a - b &:= a + (-b), & 2a &:= a + a, & 3a &:= a + a + a, & \text{enz.}, \\ ab &:= a \cdot b, & abc &:= (ab)c, & \frac{a}{b} &:= a \cdot \frac{1}{b}, & a^2 &:= aa, & a^3 &:= aaa & \text{enz.}, \\ a + bc &:= a + (bc), & a > b &\Leftrightarrow b < a, & a \leq b &\Leftrightarrow (a < b) \vee (a = b), & a \not\leq b &\Leftrightarrow \neg(a \leq b), & \text{enz.} \end{aligned}$$

1.1.3 Definitie. In een geordend veld $(F, <, +, \cdot)$ definieert men de **absolute** (of **volstrekte**) **waarde** van $a \in F$ d.m.v.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{als } a \geq 0 \\ -a & \text{als } a < 0. \end{cases}$$

Uitgaande van de basiseigenschappen 1-5 kan men, in elk geordend veld $(F, <, +, \cdot)$, de volgende afgeleide eigenschappen bewijzen.

- Voor elke $a \in F$ is $-(-a) = a$.
- Voor elke $a \in F \setminus \{0\}$ is $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$.
- Voor alle $a, b \in F$ hebben we: $ab = 0 \iff (a = 0) \vee (b = 0)$.
- Voor alle $a, b \in F$ is $a(-b) = (-a)b = -(ab)$ en $(-a)(-b) = ab$.
- Voor elke $a \in F$ hebben we: $a > 0 \iff -a < 0$.
- Voor alle $a, b, c \in F$ hebben we: als $a < b$ en $c > 0$, dan is $ac < bc$.
- Voor alle $a, b, c \in F$ hebben we: als $a < b$ en $c < 0$, dan is $ac > bc$.
- Voor elke $a \in F \setminus \{0\}$ is $a^2 > 0$. In het bijzonder is $1 > 0$.
- Voor alle $a, b \in F$ hebben we: als $0 < a < b$, dan is $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
- Voor elke $a \in F$ hebben we:
 - $|a| \geq 0$
 - $\pm a \leq |a|$
 - $|\pm a| = |a|$
 - $|a| = 0 \iff a = 0$.
- Voor alle $a, b \in F$ hebben we: $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$.
- Voor alle $a, b \in F$ geldt de **driehoeksongelijkheid**

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

Al deze fraaie eigenschappen heeft in het bijzonder ook het geordend veld $(\mathbb{Q}, <, +, \cdot)$. Maar de volgende stelling toont een gebrek van dit veld aan: het bevat ‘gaten’.²

²Ontdekt in de wiskundige school van Pythagoras (6de eeuw vC). De Pythagoreeër die het bestaan van irrationale getallen bekend maakte ging, zo luidt de legende, in een schipbreuk ten onder. Men weze gewaarschuwd.

1.1.4 Stelling. *Er bestaat geen enkel rationaal getal waarvan het kwadraat gelijk aan 2 is.*

Bewijs. Uit het ongerijmde. Veronderstel dat $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^+$ met $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Dan is $p \neq 0$. Door gemeenschappelijke factoren weg te delen, mogen we aannemen dat p en q niet beide even zijn. Er geldt dat $p^2 = 2q^2$. Bijgevolg is p even, d.w.z., voor zekere $p' \in \mathbb{N}$ is $p = 2p'$. Maar dan is $q^2 = 2p'^2$. Dit is in strijd met het feit dat p en q niet beide even zijn. $\square$

1.1.5 Opmerking. Deze stelling kan verregaand veralgemeend worden, want *een positieve macht van een breuk is nooit een natuurlijk getal, behalve als de breuk zelf vereenvoudigd kan worden tot een natuurlijk getal*. Het veld $(\mathbb{Q}, <, +, \cdot)$ bevat dus zeer veel ‘gaten’.³

1.2 Reële getallen

Wegens 1.1.4 kan men b.v. aan de lengte van de diagonaal van een vierkant met zijde 1 geen rationaal getal hechten, wat erg vervelend is, want getallen worden juist gebruikt om aan allerlei fysische grootheden (b.v. aan lengten van krommen) een waarde te hechten. Het is welbekend dat de uitbreiding van de rationale getallen tot de reële getallen dit probleem oplost.

Een belangrijk doel van deze cursus is om de stellingen uit de analyse die bekend zijn uit het middelbaar onderwijs, rigoureus te bewijzen. Nu worden de reële getallen daar (informeel) ingevoerd d.m.v. decimale ontwikkelingen. Ook worden de gebruikte eigenschappen van reële getallen hoofdzakelijk ingevoerd op basis van een combinatie van meetkundige intuïtie en analogie met de rationale getallen. Om te vermijden dat de rigoureuze opbouw van onze theorie ondermijnd wordt doordat de reële getallen niet rigoureus ingevoerd zijn, zullen we ze invoeren op basis van axioma's die juist de vertrouwde eigenschappen uitdrukken van de decimale ontwikkelingen met hun vertrouwde bewerkingen.⁴ Uitgaand van die axioma's kunnen we dan een rigoureuze theorie van de analyse opbouwen.

1.2.1 Axioma's van de reële getallen

We noteren de verzameling van de reële getallen d.m.v. $\mathbb{R}$.

Het eerste axioma vat een aantal eigenschappen samen die $\mathbb{R}$ met $\mathbb{Q}$ gemeen heeft:

$$\boxed{(\mathbb{R}, <, +, \cdot) \text{ is een geordend veld dat } \mathbb{Q} \text{ bevat.}}$$

Het tweede axioma zal uitdrukken dat $\mathbb{R}$ geen ‘gaten’ bevat. Om dit axioma in een praktisch bruikbare vorm te kunnen formuleren, voeren we eerst enkele definities in.

1.2.1 Definitie. Een **bovengrens** van (of: voor) $A \subseteq \mathbb{R}$ is een getal $b \in \mathbb{R}$ met de eigenschap

$$(\forall a \in A)(a \leq b). \quad (1.1)$$

Een verzameling die een bovengrens heeft noemen we **naar boven begrensd**.

³Zelfs meer gaten dan getallen, want de getallen zijn aftelbaar in aantal en de ‘gaten’ niet.

⁴Het gebruik van axioma's is onvermijdelijk, want men moet steeds *ergens* van kunnen uitgaan. Zelfs constructies van de natuurlijke getallen d.m.v. verzamelingen zijn onmogelijk zonder onderliggende verzameling-theoretische axioma's aan te nemen.

Door negatie van (1.1) komt er

$$b \text{ is geen bovengrens voor } A \iff (\exists a \in A)(a > b). \quad (1.2)$$

1.2.2 Definitie. Een **ondergrens** of **benedengrens** van (of: voor) $A \subseteq \mathbb{R}$ is een getal $b \in \mathbb{R}$ met de eigenschap dat $b \leq a$ voor alle $a \in A$. Een verzameling die een ondergrens heeft noemen we **naar onder** (of **beneden**) **begrensd**.

1.2.3 Definitie. Een verzameling is **begrensd** als ze zowel naar boven als naar onder begrensd is. Dit is juist het geval als er een $c \in \mathbb{R}$ bestaat met de eigenschap dat

$$(\forall a \in A)(|a| \leq c).$$

Doorgaans behoort een bovengrens van A of een ondergrens van A niet tot A .

1.2.4 Definitie. Een bovengrens van A die tot A behoort is het **grootste element** of **maximum** van A , genoteerd $\max A$. Een ondergrens van A die tot A behoort is het **kleinste element** of **minimum** van A , genoteerd $\min A$.

1.2.5 Opmerking. Het grootste element van een verzameling, als het bestaat, is uniek, en het kleinste, als dat bestaat, eveneens.

Een verzameling met een maximum is uiteraard naar boven begrensd, en een verzameling met een minimum is naar onder begrensd. Het omgekeerde geldt niet. Veel verzamelingen zijn naar boven begrensd maar hebben geen grootste element (v.b.: $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$), of zijn naar onder begrensd zonder kleinste element te hebben (v.b.: $\mathbb{R}^+$).

1.2.6 Definitie. Als de verzameling van alle bovengrenzen voor A een kleinste element heeft, dan noemt men dat element het **supremum**⁵ van (of voor) A . Men noteert deze **kleinste bovengrens** van A als $\sup A$. Als de verzameling van alle ondergrenzen voor A een grootste element heeft, dan noemt men dat element het **infimum**⁶ van (of voor) A . Men noteert deze **grootste ondergrens** van A als $\inf A$.

1.2.7 Opmerking. Doorgaans behoort $\sup A$ niet tot A ; zo is $\sup [0, 1[= 1$. Als wél $\sup A \in A$, dan is $\sup A$ meteen het *grootste element* van A . Omgekeerd, heeft een verzameling een grootste element, dan is dat meteen het supremum (dat, in dit geval, tot de verzameling behoort). Analooft voor het infimum.

Nu kunnen we het tweede axioma van $\mathbb{R}$, het zgn. **supremumprincipe**, formuleren:

Elke nietlege verzameling reële getallen die naar boven begrensd is, heeft een supremum.

1.2.8 Opmerkingen.

1. Men kan aantonen dat er juist één manier bestaat om $\mathbb{Q}$ uit te breiden tot een verzameling die aan de axioma's van $\mathbb{R}$ voldoet.⁷

⁵Latijn voor *het bovenste*. Meervoud: suprema.

⁶Latijn voor *het onderste*. Meervoud: infima.

⁷D.w.z., als men uitgaat van de gebruikelijke axioma's van de verzamelingenleer. Met 'juist één manier' wordt bedoeld: als men op verschillende manieren verzamelingen R_1 , R_2 construeert die voldoen aan de axioma's van $\mathbb{R}$ (denk bijv. aan verzamelingen van binaire vs. decimale ontwikkelingen), dan 'gedraagt R_2 zich net zoals R_1 , op de namen van de elementen na'. Dat laatste kan men wiskundig uitdrukken door te vragen dat een bijectie $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$ bestaat met de eigenschap dat de bewerkingen op elementen van R_1 overeenkomen met de bewerkingen in R_2 op de beelden onder φ . Zulke φ noemt men een **isomorfisme**.

2. Het tweede axioma is minder intuïtief als het eerste, omdat we het supremumprincipe bij het rekenen met decimale ontwikkelingen niet onder die vorm gebruiken. Men kan echter rechtstreeks nagaan dat de verzameling van alle decimale ontwikkelingen voldoet aan het supremumprincipe (zie *Appendix*). Het supremumprincipe zal handig blijken om eigenschappen aan te tonen over (functies op) reële getallen.
3. Uit het supremumprincipe zal volgen dat een uniek element $x \in \mathbb{R}^+$ bestaat waarvoor $x^2 = 2$, dat we als $\sqrt{2}$ zullen noteren (zie 7.1.12). Uit de ervaring met decimale ontwikkelingen voelt men aan dat $\sqrt{2} = \sup\{1; 1,4; 1,41; 1,414; \dots\}$. Het supremumprincipe zorgt er dus wel degelijk voor dat de ‘gaten’ in $\mathbb{Q}$ opgevuld worden.

1.2.9 Definitie. De elementen van $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ noemt men **irrationale** getallen.

1.2.10 Stelling. *Bij elke $a \in \mathbb{R}$ bestaat er een $n \in \mathbb{N}^+$ met $n > a$.*

Bewijs. Als dat niet zo was, dan bestond er een $a \in \mathbb{R}$ met de eigenschap dat $n \leq a$ voor alle $n \in \mathbb{N}^+$. De verzameling $\mathbb{N}^+$ zou naar boven begrensd zijn (door a) en dus een kleinste bovengrens c bezitten. Wegens ‘ c bovengrens van $\mathbb{N}^+$ ’ zou

$$1 \leq c, \quad 2 \leq c, \quad 3 \leq c, \quad \dots$$

waaruit zou volgen

$$(0 \leq c - 1, \quad 1 \leq c - 1, \quad 2 \leq c - 1, \quad \dots)$$

Hieruit blijkt dat $c - 1$ ook een bovengrens voor $\mathbb{N}^+$ is. Dat kan niet, want deze bovengrens voor $\mathbb{N}^+$ is kleiner dan de kleinste bovengrens, c , voor $\mathbb{N}^+$. $\square$

1.2.11 Stelling. *Als $a \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}$ met $a < b$, dan bestaat er een rationaal getal $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+$) waarvoor*

$$a < \frac{p}{q} < b. \quad (1.3)$$

Bewijs. Geval 1: $0 \leq a < b$. Wegens de vorige stelling kunnen we een $q \in \mathbb{N}^+$ vinden waarvoor

$$q > \frac{1}{b - a}, \quad \text{m.a.w., waarvoor } \frac{1}{q} < b - a.$$

Nadat deze q bepaald is passen we de stelling op qa toe, en vinden dat er $n \in \mathbb{N}^+$ bestaan waarvoor

$$qa < n.$$

Is p de kleinste van die n 's (toepassing van stelling 1.1.1), dan is $qa < p$ (dus $p \geq 1$, anders volgt $a < 0$) en

$$p - 1 \leq qa < p,$$

m.a.w.

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leq a < \frac{p}{q}.$$

De laatste ongelijkheid is de eerste van (1.3). Uit de voorlaatste ongelijkheid halen we, wegens $\frac{1}{q} < b - a$, dat

$$\frac{p}{q} \leq a + \frac{1}{q} < a + (b - a) = b,$$

de tweede ongelijkheid van (1.3).

Geval 2: $a < 0 < b$. In dit geval voldoet $\frac{p}{q} = 0$.

Geval 3: $a < b \leq 0$. We kunnen het eerste geval toepassen op $0 \leq -b < -a$. We vinden dan $p \in \mathbb{Z}$ en $q \in \mathbb{N}^+$ met $-b < \frac{p}{q} < -a$, d.i. $a < \frac{-p}{q} < b$. $\square$

1.2.12 Gevolg. *Tussen elke twee verschillende reële getallen liggen oneindig veel rationale getallen.*

Bewijs. Bekijk reële getallen $a \neq b$. Door de stelling ligt er tussen a en b minstens één rationaal getal r . Tussen a en r ligt opnieuw een rationaal getal, tussen r en b eveneens, enzovoort. Zo vinden we oneindig veel rationale getallen tussen a en b . $\square$

1.2.13 Definitie. Een oneindige verzameling is **aftelbaar**⁸ als zij bijectief is met $\mathbb{N}$.

De elementen van een aftelbare oneindige verzameling A kunnen ‘afgeteld’ d.i. ‘op een rij gezet’ worden: $a_1, a_2, \dots$. Aftelbaar zijn b.v.: $\mathbb{N}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^2$, en alle deelverzamelingen hiervan. In 2.2.16 zullen we bewijzen dat $\mathbb{R}$ niet aftelbaar is.

1.2.2 Eigenschappen van supremum en infimum

1.2.14 Stelling (Kenmerkende eigenschappen van het supremum). *Zij X een nietlege verzameling reële getallen. Het reëel getal ω is het supremum van X juist als de volgende twee eigenschappen gelden:*

1. voor elke $x \in X$ is $x \leq \omega$
2. voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat er een $x_\varepsilon \in X$ met $\omega - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Bewijs. Als $\omega = \sup X$, dan is ω een bovengrens voor X , hetgeen in 1. uitgedrukt is. Verder is ω de kleinste bovengrens van X . Bijgevolg is $\omega - \varepsilon$ geen bovengrens voor X . Wegens (1.2) volgt dan 2.

Omgekeerd, 1. drukt uit dat ω een bovengrens voor X is, en 2. stelt dat ω de kleinste bovengrens is. $\square$

1.2.15 Opmerking. In feite moeten we 1.2.14.2 niet voor *alle* $\varepsilon > 0$ nagaan, maar enkel voor positieve ε 's die klein genoeg zijn. Veronderstel nl. eens dat voldaan is aan 1. en aan de eigenschap

$$\begin{aligned} \text{er bestaat een } \varepsilon_0 > 0 \text{ waarvoor er, bij elke positieve } \varepsilon \leq \varepsilon_0, \\ \text{een } x_\varepsilon \in X \text{ bestaat met } \omega - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Dan is ook aan 1.2.14.2 voldaan. Voor een $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ bestaat de gezochte x_ε door (1.4), en voor een $\varepsilon > \varepsilon_0$ kunnen we x_{ε_0} nemen, die immers tot X behoort en voldoet aan $x_{\varepsilon_0} > \omega - \varepsilon_0 > \omega - \varepsilon$.

Volledig analoog volgt

⁸In het Engels: *denumerable* of *countable*. Sommige auteurs maken een onderscheid tussen beide en hebben dan een afzonderlijke benaming voor ‘eindig of aftelbaar oneindig’.

1.2.16 Stelling (Kenmerkende eigenschappen van het infimum). *Zij X een nietlege verzameling reële getallen. Het reëel getal α is het infimum van X juist als de volgende twee eigenschappen gelden:*

1. voor elke $x \in X$ is $\alpha \leq x$
2. voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat er een $x_\varepsilon \in X$ met $x_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$.

We geven hieronder de voornaamste rekenregels voor het supremum.

1.2.17 Stelling. *Zij $X \subseteq \mathbb{R}, Y \subseteq \mathbb{R}$ niet leeg en naar boven begrensd.*

1. Als er bij elke $x \in X$ een $y \in Y$ bestaat met $y \geq x$,⁹ dan is $\sup X \leq \sup Y$.
2. Wordt de verzameling vergroot, dan wordt het supremum niet kleiner, m.a.w.: als $X \subseteq Y$, dan is

$$\sup X \leq \sup Y.$$

3. We noteren (voor een reële c) $cX := \{cx : x \in X\}$.
 Als $c \geq 0$, dan is cX naar boven begrensd en is $\sup(cX) = c \sup X$.
 Als $c \leq 0$, dan is cX naar onder begrensd en is $\inf(cX) = c \sup X$.

Bewijs. 1. Kies $x \in X$ willekeurig. Dan is $x \leq y \leq \sup Y$ (zekere $y \in Y$). Bijgevolg is $\sup Y$ een bovengrens voor X . Bij definitie van $\sup X$ is dan $\sup Y \geq \sup X$.

2. Voor elke $x \in X$ is $x \leq x$ en $x \in Y$, zodat we deel 1. kunnen toepassen met $y := x$.

3. Voor $c = 0$ is $cX = \{0\}$, zodat $\sup(cX) = \inf(cX) = 0$.

Beschouw dan het geval $c < 0$. Stel $\alpha = \sup X$. Om te vinden dat $\inf(cX) = c\alpha$ gebruiken we 1.2.14 en 1.2.16.

- (i) elke $\xi \in cX$ voldoet aan $\xi \geq c\alpha$, want $\xi = cx$ met $x \leq \alpha$;
- (ii) bij elke $\varepsilon > 0$ bestaat er een $\xi \in cX$ met $\xi < (c\alpha) + \varepsilon$. Het volstaat een $x \in X$ te nemen waarvoor $x > \alpha + \varepsilon/c$ (bemerkt hierbij dat $\varepsilon/c < 0$ is) en te stellen $\xi = cx$.

Het geval $c > 0$ verloopt analoog. □

1.2.18 Stelling (Infimumprincipe). *Elke nietlege verzameling van reële getallen die naar onder begrensd is, heeft een infimum.*

Bewijs. Als $X \subseteq \mathbb{R}$ naar onder begrensd is, dan is $-X$ naar boven begrensd. Wegens 1.2.17.3 is $\inf X = \inf(-(-X)) = -\sup(-X)$. □

Analoog gelden volgende rekenregels voor het infimum:

1.2.19 Stelling. *Zij $X \subseteq \mathbb{R}, Y \subseteq \mathbb{R}$ niet leeg en naar onder begrensd.*

1. Als er bij elke $x \in X$ een $y \in Y$ bestaat met $y \leq x$, dan is $\inf Y \leq \inf X$.
2. Wordt de verzameling vergroot, dan wordt het infimum niet groter, m.a.w.: als $X \subseteq Y$, dan is

$$\inf Y \leq \inf X.$$

⁹Dit drukt in zekere zin uit dat Y bestaat uit grotere elementen dan X

3. Als $c \geq 0$, dan is cX naar onder begrensd en is $\inf(cX) = c \inf X$.

Als $c \leq 0$, dan is cX naar boven begrensd en is $\sup(cX) = c \sup X$.

1.2.20 Notatie. Voor het supremum en infimum van een verzameling functiewaarden gebruiken we meestal de notaties

$$\sup_{x \in A} f(x) := \sup f(A) = \sup\{f(x) : x \in A\} \quad \text{en} \quad \inf_{x \in A} f(x) := \inf f(A) = \inf\{f(x) : x \in A\}$$

of korter

$$\sup_A f \quad \text{en} \quad \inf_A f.$$

1.2.21 Notatie. Zijn f en g functies met eenzelfde definitieverzameling D , dan is $f + g$ de functie die $x \in D$ afbeeldt op $f(x) + g(x)$. Analoog voor $f - g$, fg en, als $g(x)$ nergens nul is in D , f/g .

Verder zeggen we dat $f \geq g$ als $f(x) \geq g(x)$ voor elke $x \in D$. Analoog voor $f \leq g$.

We noemen f naar boven begrensd op een verzameling A als $f(A)$ naar boven begrensd is. Analoog voor *naar onder begrensd*, en voor *begrensd*. I.h.b. is f begrensd op A juist als een $K \in \mathbb{R}$ bestaat waarvoor geldt dat $|f(x)| \leq K$ voor alle $x \in A \cap \mathcal{D}_f$.

1.2.22 Stelling. Als de functies $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ en $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ naar boven begrensd zijn op $A \subseteq D$ en $c \in \mathbb{R}$, dan is

1. $\sup_A(f + g) \leq \sup_A f + \sup_A g$.
2. $\sup_A(f + c) = c + \sup_A f$.
3. Als $f \geq 0$ en $g \geq 0$, dan is ook $\sup_A(fg) \leq \sup_A f \sup_A g$.

Bewijs. 1. Neem willekeurig $x \in A$. Dan is $f(x) \leq \sup_A f$ en $g(x) \leq \sup_A g$, zodat ook $f(x) + g(x) \leq \sup_A f + \sup_A g$. Bijgevolg is $\sup_A f + \sup_A g$ een bovengrens voor $\{f(x) + g(x) : x \in A\}$.

2. $\leq$: wegens deel 1.

$\geq$: $\sup_A f = \sup_A((f + c) - c) \leq (\sup_A(f + c)) - c$.

3. Analoog als 1. □

Analoog hebben we voor het infimum:

1.2.23 Stelling. Als de functies $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ en $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ naar onder begrensd zijn op $A \subseteq D$ en $c \in \mathbb{R}$, dan is

1. $\inf_A(f + g) \geq \inf_A f + \inf_A g$.
2. $\inf_A(f + c) = c + \inf_A f$.
3. Als $f \geq 0$ en $g \geq 0$, dan is ook $\inf_A(fg) \geq \inf_A f \inf_A g$.

1.2.24 Opmerking. De ongelijkheden in de vorige stelling zijn in het algemeen geen gelijkheden (zelfs niet als het supremum een maximum is). B.v., als $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$ en $A = [0, 1]$, dan is $(f + g)(x) = 1$, zodat

$$1 = \max_A(f + g) = \sup_A(f + g) < \sup_A f + \sup_A g = \max_A f + \max_A g = 2.$$

1.2.25 Stelling.

1. $\sup_A f \leq b$ juist als $(\forall x \in A)(f(x) \leq b)$
2. $\inf_A f \geq a$ juist als $(\forall x \in A)(f(x) \geq a)$
3. $\sup_A f - \inf_A f \leq C$ juist als $(\forall x, x' \in A)(|f(x) - f(x')| \leq C)$
4. $\sup_A f - \inf_A f = \sup_{x, x' \in A} |f(x) - f(x')|$.

Bewijs. 1. Beide uitspraken drukken juist uit dat b een bovengrens is van $f(A)$.

2. Analoog.

3. $\Rightarrow$: neem willekeurig $x, x' \in A$. Dan is $f(x) \leq \sup_A f$ en $f(x') \geq \inf_A f$, zodat $f(x) - f(x') \leq \sup_A f - \inf_A f$. Analoog is ook $f(x') - f(x) \leq \sup_A f - \inf_A f$.

$\Leftarrow$: neem willekeurig $x, x' \in A$. Dan geldt $f(x') \leq C + f(x)$. Houden we $x \in A$ vast, dan volgt door deel 1 dat $\sup_A f \leq C + f(x)$. Bijgevolg is $f(x) \geq (\sup_A f) - C$ voor elke $x \in A$. Door deel 2 volgt dan dat $\inf_A f \geq (\sup_A f) - C$.

4. is een herformulering van 3: $\geq$: kies $C := \sup_A f - \inf_A f$. Uit $3(\Rightarrow)$ volgt dat $C \geq |f(x) - f(x')|$ voor elke $x, x' \in A$, zodat $C \geq \sup_{x, x' \in A} |f(x) - f(x')|$.

$\leq$: kies $C := \sup_{x, x' \in A} |f(x) - f(x')|$. Uit $3(\Leftarrow)$ volgt dat $\sup_A f - \inf_A f \leq C$. $\square$

1.2.26 Opmerking. Als $f(x) < b$ voor alle $x \in A$, dan volgt door de vorige stelling dat $\sup_A f(x) \leq b$, maar er geldt niet noodzakelijk dat $\sup_A f(x) < b$. B.v., als $f(x) = x$ en $A =]0, 1[$, dan is $f(x) < 1$ voor alle $x \in A$, maar $\sup_A f(x) = 1$. Analoog voor het infimum. Men zegt informeel: *door het nemen van suprema of infima worden sterke ongelijkheden zwak*.

1.2.3 Reële intervallen

1.2.27 Definitie. Een verzameling V van reële getallen noemt men een **interval** als zij de volgende eigenschap heeft: *elk punt dat tussen twee punten van V ligt, behoort tot V* .

1.2.28 Opmerking. De lege verzameling $V = \emptyset$ is een interval, omdat de eigenschap ‘voor elke twee punten van $\emptyset$ geldt ...’ triviaal waar is.

1.2.29 Stelling. *Er bestaan negen types van intervallen, nl.*¹⁰

¹⁰Internationaal duidt men inbegrepen eindpunten met vierkante haken aan, uitgesloten eindpunten met ronde haken, b.v. $[a, b)$, $(-\infty, a]$.

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	<i>(begrensd, gesloten)</i>
$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	<i>(begrensd, open)</i>
$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	<i>(begrensd, halfopen)</i>
$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	<i>(begrensd, halfopen)</i>
$]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	<i>(onbegrensd, open)</i>
$[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	<i>(onbegrensd, halfopen of gesloten)</i>
$] -\infty, a[:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	<i>(onbegrensd, open)</i>
$] -\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	<i>(onbegrensd, halfopen of gesloten)</i>
$] -\infty, +\infty[:= \mathbb{R}$	<i>(onbegrensd, open).</i>

Hierin zijn $a \leq b$ reële getallen en $+\infty, -\infty$ zijn symbolen (geen reële getallen) die op zichzelf geen betekenis hebben.

Bewijs. Zij V een nietleeg interval, en neem $a \in V$. We ontbinden V als

$$V = \underbrace{\{x \in V \mid x \geq a\}}_{:=R} \cup \underbrace{\{x \in V \mid x \leq a\}}_{:=L}.$$

We bekijken eerst $R = \{x \in V \mid x \geq a\}$, en onderscheiden verschillende gevallen.

1. R is naar boven begrensd. Dan bestaat $b := \sup R$. We tonen aan dat $[a, b[\subseteq R \subseteq [a, b]$, zodat noodzakelijk $R = [a, b[$ of $R = [a, b]$.
 - $R \subseteq [a, b]$: als $x \in R$, dan $x \geq a$ en $x \leq b$ door de definitie van R
 - $[a, b[\subseteq R$: als $a \leq x < b$, dan bestaat er (eigenschap van $b = \sup R$) een $y \in R$ met $a \leq x < y$; als $x = a$, dan $x \in R$ omdat $a \in R$; als $x \neq a$, dan ligt x tussen twee elementen van V (nl. $a \in R \subseteq V$ en $y \in R \subseteq V$) zodat, omdat V een interval is, $x \in V$; vandaar $x \in R$ door de definitie van R .
2. Is R is niet naar boven begrensd, dan is $R = [a, +\infty[$.
 - $R \subseteq [a, +\infty[$: als $x \in R$, dan $x \geq a$ door de definitie van R
 - $[a, +\infty[\subseteq R$: als $x \geq a$, dan is deze x geen bovengrens van R (want bij veronderstelling heeft R geen bovengrens), zodat er een y bestaat met $x < y \in R$; uit $a \leq x < y \in V$ volgt dan, omdat V een interval is, $x \in V$; vandaar $x \in R$ door de definitie van R .

Analoge beschouwingen gelden voor $L := \{x \in V \mid x \leq a\}$. Is L naar beneden begrensd, dan heeft L de vorm $L = [c, a]$ of $L =]c, a]$; is L niet naar onder begrensd, dan $L =]-\infty, a]$.

Uit de drie mogelijke gedaanten van R , nl.

$$[a, b], \quad [a, b[, \quad [a, +\infty[$$

en de drie voor L , nl.

$$[c, a], \quad]c, a], \quad]-\infty, a]$$

volgen voor $V = L \cup R$ de negen mogelijke gedaanten

$$\begin{aligned} & [c, b], \quad]c, b], \quad [c, b[, \quad]c, b[\\ &]-\infty, b], \quad]-\infty, b[, \quad [c, +\infty[, \quad]c, +\infty[, \\ &]-\infty, +\infty[. \end{aligned}$$

Het lege interval $\emptyset$ moet niet afzonderlijk geteld worden, want wij kunnen het opvatten als een interval van het type $]c, b]$ (b.v. $\emptyset =]0, 0]$). $\square$

1.2.30 Opmerking. Een interval van de vorm $[a, +\infty[,]-\infty, a]$ of $\emptyset$ wordt ook *gesloten* genoemd, omdat het complement van een open interval steeds een gesloten verzameling genoemd wordt (zie ook Analyse II).

Door het bestaan van onbegrensde gesloten intervallen geeft men een specifieke benaming aan *begrensde* gesloten intervallen:

1.2.31 Definitie. Een interval heet **compact** als het gesloten en begrensd is (d.w.z., het is ofwel $\emptyset$, ofwel van de gedaante $[a, b]$ met $a \leq b$).

1.2.32 Quiz. Waar of niet waar? ($\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, f en g zijn begrensde functies op A .)

1. Als $a = \inf A$, dan is $a \in A$.
2. Als A begrensd is en $a \in A$, dan is $a \geq \inf A$.
3. Als $\varepsilon > 0$ bestaat en $x \in A$ bestaat waarvoor $x > s - \varepsilon$, dan is $s = \sup A$.
4. $\inf_A(cf + g) \leq c \inf_A f + \inf_A g$ voor elke $c \in \mathbb{R}$.
5. $\inf_A(cf + g) \geq c \inf_A f + \inf_A g$ voor elke $c \in \mathbb{R}$.
6. De afbeelding $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = x^2$ is injectief.
7. De afbeelding $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]: f(x) = x^2$ is injectief.

1.2.33 Quiz. We zullen zien dat de functie $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voldoet aan $\sin(x) = \sin(\pi - x)$. Dan is ook $f(\sin x) = f(\sin(\pi - x))$ voor gelijk welke functie f . Kies nu $f(x) = x \sin x$. Dan is $x \sin x = (\pi - x) \sin(\pi - x)$, zodat $x = \pi - x$, en dus $\pi = 2x$, hetgeen geldt voor gelijk welke x . Wat is fout aan deze redenering?

1.A Appendix

1.A.1 Stelling. *De verzameling van alle decimale ontwikkelingen voldoet aan het supremum-principe.*

Bewijs. We gaan hierbij uit van decimale ontwikkelingen die we noteren als

$$a = a_m a_{m-1} \dots a_0, a_{-1} a_{-2} \dots$$

(voor zekere $m \in \mathbb{N}$), waarbij de cijfers $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$, samen met hun inversen $-a$. Voor het gemak definiëren we ook $a_{m+1} := 0$, $a_{m+2} := 0$, enz. Bij definitie is zulke $a \geq 0$ en $-a \leq 0$. Zij nu $a, b \geq 0$. Dan is bij definitie $a < b$ juist als voor de grootste index $k \in \mathbb{Z}$ met de eigenschap dat $a_k \neq b_k$, ook geldt dat $a_k < b_k$.

Zij nu A een nietlege verzameling van decimale ontwikkelingen die naar boven begrensd is door zekere $b = b_m b_{m-1} \dots$, met $b_m \neq 0$. We nemen eerst aan dat A een nietnegatief element bevat (het andere geval wordt analoog bewezen¹¹). Definieer nu het cijfer

$$s_m := \max\{a_m : a \in A, a \geq 0\}.$$

Dit cijfer bestaat omdat we het maximum nemen over een nietlege, eindige verzameling. Vervolgens definiëren we

$$s_{m-1} := \max\{a_{m-1} : a \in A, a \geq 0, a_m = s_m\}.$$

Door de definitie van s_m is de verzameling in het rechterlid opnieuw nietleeg. Analoog definiëren we

$$s_{m-2} := \max\{a_{m-2} : a \in A, a \geq 0, a_m = s_m, a_{m-1} = s_{m-1}\}, \quad \text{enz.}$$

We tonen nu eerst aan dat de zo geconstrueerde s een bovengrens is van A . Neem daartoe willekeurig $a \in A$. Als $a \leq 0$, dan is duidelijk $a \leq 0 \leq s$. Blijft het geval $a > 0$. Dan is $a \leq b$, dus $a_k = 0$ als $k > m$. Bij definitie van s_m is $a_m \leq s_m$. Als $a_m < s_m$, dan is $a \leq s$. Blijft het geval $a_m = s_m$. Bij definitie van s_{m-1} is dan $a_{m-1} \leq s_{m-1}$, enz. Blijft dus enkel het geval dat de strikte ongelijkheid zich nooit voordoet, maar dan is $a_k = s_k$ voor elke k , en dus $a = s$.

We tonen tenslotte aan dat s de kleinste bovengrens is. Neem daartoe een willekeurige bovengrens b van A . Als $b_k > 0$ voor zekere $k > m$, dan is $b \geq s$. Blijft het geval $b_k = 0$ voor elke $k > m$. Omdat $a \in A$, $a \geq 0$ bestaat met $a_m = s_m$ en $b \geq a$, is $b_m \geq s_m$. Als $b_m > s_m$, dan is $b \geq s$. Blijft het geval $b_m = s_m$. Omdat $a \in A$, $a \geq 0$ bestaat met $a_m = s_m$ en $a_{m-1} = s_{m-1}$ en $b \geq a$, is $b_{m-1} \geq s_{m-1}$, enz. Blijft dus enkel het geval dat de strikte ongelijkheid zich nooit voordoet, maar dan is $b_k = s_k$ voor elke k , en dus $b = s$. $\square$

¹¹Als A een negatieve bovengrens heeft, dan loopt het bewijs analoog (nu met minima i.p.v. maxima in de definitie van de s_k). In het overblijvende geval is $\sup A = 0$.

Hoofdstuk 2

Reële rijen

2.1 Elementaire theorie

2.1.1 Definitie. Een **reële rij** is een afbeelding $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Expliciete reële rijen schrijft men bij afspraak door de termen op te sommen in de volgorde $f(1), f(2), \dots$, b.v.

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \dots$$

Als de rij in die vorm gegeven is kan men de functie $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ gemakkelijk reconstrueren: $f(1)$ is de eerste van de opgesomde termen, $f(2)$ de tweede enzovoort.

Als een reële rij niet expliciet gegeven is, dan noteert men ze als $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, (x_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$, $(x_n)_n$ of (x_n) , of men omschrijft ze als ‘de rij x_n ’. Hierin noemt men n het **rangnummer** of **index** van de **term** x_n . In plaats van ‘ x ’ mag men gelijk welke andere beschikbare letter gebruiken om een algemene rij te noteren.

Algemener noemt men ook een afbeelding $f : \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$, met $n_0 \in \mathbb{N}$, een ‘reële rij’, die men dan noteert als $(x_n)_{n \geq n_0}$. Door de termen te hernummeren kan men zo’n rij herleiden tot het standaardmodel waarin $\mathbb{N}^+$ de definitieverzameling is.

2.1.2 Opmerking. Volgens onze definitie heeft elke rij oneindig veel termen, maar die termen kunnen gelijk zijn. Zo zijn *alle* termen van de rij $1, 1, \dots$ gelijk.

2.1.3 Definitie. De reële rij (x_n) **convergeert naar a** ($a \in \mathbb{R}$) als

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^+)(n \geq N \implies |x_n - a| < \varepsilon), \quad (2.1)$$

wat we soms afkorten tot

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{zodra } n \geq N_\varepsilon.$$

2.1.4 Voorbeeld. De rij $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$ convergeert naar 0.

2.1.5 Opmerking. Het is soms nuttig de ongelijkheid $|x_n - a| < \varepsilon$ te vervangen door het gelijkwaardig stel ongelijkheden $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Verder kan men $\geq N$ vervangen door $> N$, en/of $< \varepsilon$ door $\leq \varepsilon$ zonder dat de betekenis van de formule (2.1) verandert.

2.1.6 Definitie. Als de rij (x_n) naar a convergeert dan noemt men a de **limiet** van de rij (x_n) , en men noteert $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ (te lezen als ‘de limiet van x_n als n divergeert naar plus oneindig’) of korter $\lim_n x_n = a$ of nog ‘ $x_n \rightarrow a$ (als $n \rightarrow +\infty$)’.

2.1.7 Notatie. De negatie van ‘ $x_n \rightarrow a$ ’ noteren wij als $x_n \nrightarrow a$, hetgeen kan inhouden dat de rij (x_n) niet convergeert, ofwel dat ze convergeert naar een limiet die niet a is.

De zegswijze ‘de limiet van x_n ’ wordt gerechtvaardigd door de volgende stelling:

2.1.8 Stelling. *De limiet van een convergente rij is uniek.*

Bewijs. Als de rij zowel naar a als naar b convergeert, gelden tegelijkertijd

$$|x_n - a| < \varepsilon/2 \quad \text{zodra } n \geq N_a$$

en

$$|x_n - b| < \varepsilon/2 \quad \text{zodra } n \geq N_b.$$

Zij N het grootste van de twee getallen N_a en N_b . Voor alle $n \geq N$ geldt dan door de driehoeksongelijkheid dat

$$|a - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \varepsilon.$$

Omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig is, is $|a - b|$ geen positief getal, zodat $|a - b| = 0$ en dus $a = b$. $\square$

2.1.9 Definitie. Een reële rij (x_n) **divergeert naar $+\infty$** als

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^+)(n \geq N \implies x_n > M),$$

wat we meestal afkorten tot

$$x_n > M \quad \text{zodra } n \geq N.$$

We noteren dan kortweg ‘ $x_n \rightarrow +\infty$ (als $n \rightarrow +\infty$)’.

Men kan ‘ $\geq N$ ’ vervangen door ‘ $> N$ ’, en/of ‘ $> M$ ’ door ‘ $\geq M$ ’ zonder dat de betekenis van de formule verandert.

2.1.10 Voorbeeld. $(n^2 - \frac{1}{n}) \rightarrow +\infty$.

2.1.11 Definitie. Een reële rij (x_n) **divergeert naar $-\infty$** als

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^+)(n \geq N \implies x_n < M),$$

wat we meestal afkorten tot

$$x_n < M \quad \text{zodra } n \geq N.$$

We noteren dan kortweg ‘ $x_n \rightarrow -\infty$ (als $n \rightarrow +\infty$)’.

Ook hier kan men ‘ $\geq N$ ’ vervangen door ‘ $> N$ ’, en/of ‘ $< M$ ’ door ‘ $\leq M$ ’ zonder dat de betekenis van de formule verandert.

2.1.12 Opmerking. De eventuele convergentie, en de waarde van de limiet, worden niet beïnvloed door het weglaten (of toevoegen) van een eindig aantal begintermen. Als de rij $x_1, x_2, x_3, \dots$ convergeert, dan zal ook de rij $x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots$ convergeren, naar dezelfde limiet. Dit betekent ook dat, als (x_n) convergeert, we b.v. mogen schrijven dat

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1}$$

want voluit geschreven staat er dan dat de limiet van de rij $x_1, x_2, \dots$ dezelfde is als de limiet van de rij $x_2, x_3, \dots$.

2.1.13 Definitie. Overeenkomstig de definitie voor functies (zie 1.2.21) noemen we een reële rij (x_n) **naar boven begrensd** als $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ naar boven begrensd is, m.a.w. als er een constante M bestaat waarvoor geldt dat $x_n \leq M$ voor alle n . Ze is **naar beneden/onder begrensd** als er een constante m bestaat waarvoor geldt dat $x_n \geq m$ voor alle n . Een reële rij (x_n) noemen we **begrensd** als ze naar boven en naar beneden begrensd is, m.a.w. als er een constante K bestaat waarvoor geldt dat $|x_n| \leq K$ voor alle n .

2.1.14 Stelling. *Een convergente rij is begrensd.*

Bewijs. Kies $\varepsilon = 1$ in de definitie van convergentie. Dan hebben we i.h.b. dat

$$|x_n - a| < 1 \quad \text{zodra } n \geq N.$$

Door de driehoeksongelijkheid verkrijgen we dan

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| < 1 + |a| \quad \text{zodra } n \geq N.$$

Vandaar geldt voor *alle* $n \in \mathbb{N}$ dat

$$|x_n| < 1 + |a| + |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_{N-1}| =: K.$$

□

2.1.15 Stelling. *Als $x_n \rightarrow a$ en $y_n \rightarrow b$, dan $x_n + y_n \rightarrow a + b$ en $x_n - y_n \rightarrow a - b$.*

Bewijs. Kies willekeurig $\varepsilon > 0$. Dan is

$$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

als n groot genoeg is.

□

2.1.16 Hulpstelling. *Als $x_n \rightarrow 0$ en $c \in \mathbb{R}$, dan ook $cx_n \rightarrow 0$.*

Bewijs. Als $c = 0$, dan is duidelijk $cx_n \rightarrow 0$. Als $c \neq 0$, dan is $|c| > 0$. Wegens $x_n \rightarrow 0$ bestaat er, bij elke $\varepsilon > 0$ een N_ε met de eigenschap dat $|x_n| < \varepsilon/|c|$ zodra $n > N_\varepsilon$. Er volgt

$$|cx_n| < \varepsilon \quad \text{zodra } n > N_\varepsilon.$$

□

2.1.17 Stelling (Sandwich-regel). *Als $x_n \leq y_n \leq z_n$ voor alle n , en als $x_n \rightarrow a$ en $z_n \rightarrow a$, dan ook $y_n \rightarrow a$.*

Bewijs. Bij veronderstelling hebben we

$$\begin{aligned} a - \varepsilon &\leq x_n \leq a + \varepsilon && \text{voor } n \geq m \\ a - \varepsilon &\leq z_n \leq a + \varepsilon && \text{voor } n \geq M. \end{aligned}$$

Zij N het grootste van de twee getallen m en M . Dan hebben we

$$a - \varepsilon \leq x_n \leq y_n \leq z_n \leq a + \varepsilon$$

voor $n \geq N$. Dit betekent dat $|y_n - a| \leq \varepsilon$ voor alle $n \geq N$.

□

De volgende regel zal ons soms wat ‘ ε -werk’ besparen bij het aantonen van convergentie:

2.1.18 Gevolg. Als $|x_n - a| \leq y_n$ voor alle n , en als $y_n \rightarrow 0$, dan is $x_n \rightarrow a$.

Bewijs. Omdat $0 \leq |x_n - a| \leq y_n$ voor alle n , is $|x_n - a| \rightarrow 0$ door de sandwich-regel. Dit betekent juist dat $|x_n - a| \leq \varepsilon$ zodra $n \geq N_\varepsilon$, m.a.w. $x_n \rightarrow a$. $\square$

2.1.19 Opmerking. Eigenschappen van limieten blijven ook gelden als de voorwaarden pas *vanaf een bepaald rangnummer* vervuld zijn, want de limiet verandert niet door het weglaten van een eindig aantal termen.

2.1.20 Stelling. Als $x_n \rightarrow a$, dan $|x_n| \rightarrow |a|$.

Bewijs. $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| \rightarrow 0$. $\square$

2.1.21 Opmerking. $x_n \rightarrow 0 \iff |x_n| \rightarrow 0$, want beide zijn gelijkwaardig met: $|x_n| < \varepsilon$, zodra $n \geq N_\varepsilon$. Voor $a \neq 0$ geldt de equivalentie niet.

2.1.22 Stelling. Als $x_n \rightarrow a$ en $y_n \rightarrow b$, dan $x_n y_n \rightarrow ab$.

Bewijs. We hebben

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |(x_n y_n - a y_n) + (a y_n - ab)| \leq |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| \\ &= |y_n| |x_n - a| + |a| |y_n - b| \\ &\leq M |x_n - a| + |a| |y_n - b|, \end{aligned}$$

waarbij we gesteund hebben op $|y_n| \leq M$. Uit 2.1.15 en 2.1.16 volgt dat

$$M |x_n - a| + |a| |y_n - b| \rightarrow 0,$$

zodat $x_n y_n \rightarrow ab$ door 2.1.18. $\square$

2.1.23 Stelling. Als $x_n \rightarrow a \neq 0$, dan is $x_n \neq 0$ vanaf een zeker rangnummer N , en de rij $(1/x_n)_{n \geq N}$ convergeert naar $1/a$.

Bewijs. Uit $|x_n| \rightarrow |a| > 0$ (vorige stelling) volgt, met de keuze $\varepsilon = |a|/2$, dat $\frac{|a|}{2} = |a| - \frac{|a|}{2} < |x_n| < \dots$ zodra $n \geq N$. Dit leert in het bijzonder dat $x_n \neq 0$ voor $n \geq N$.

Verder hebben we voor $n \geq N$

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|x_n - a|}{|x_n| |a|} < \frac{2}{|a|^2} |x_n - a| \rightarrow 0$$

waarbij de ongelijkheid geldt omdat $|x_n| > |a|/2$ voor $n \geq N$. $\square$

2.1.24 Opmerking. Als $x_n \rightarrow 0$ en $x_n \neq 0$ vanaf een zekere index, dan is $1/|x_n| \rightarrow +\infty$.

2.1.25 Gevolg. Als $y_n \rightarrow a \neq 0$, en $x_n \rightarrow b$, dan $x_n/y_n \rightarrow b/a$.

2.1.26 Stelling. Als $x_n \geq 0$ voor alle n , en $x_n \rightarrow a$, dan $a \geq 0$.

Bewijs. We hebben

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

voor n voldoende groot. Als $a < 0$, dan kunnen we $\varepsilon = -\frac{a}{2} > 0$ kiezen, zodat

$$x_n < a + \varepsilon = \frac{a}{2} < 0$$

voor n voldoende groot. Dit is in strijd met het gegeven. $\square$

2.1.27 Gevolg. Als $x_n \leq y_n$ voor alle n , en $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$, dan is $a \leq b$.

2.1.28 Opmerking. Als $x_n < y_n$ voor alle n , en $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$, dan is $a \leq b$ maar niet noodzakelijk $a < b$. Zo is $0 < \frac{1}{n}$ voor alle n en na limietovergang volgt $0 \leq 0$ maar niet $0 < 0$. Men zegt informeel: *door limietovergang worden sterke ongelijkheden zwak*.

2.1.29 Gevolg. Als alle termen van een convergente rij in het compact interval $[a, b]$ liggen, dan ligt ook de limiet daarin.

Bewijs. Bij veronderstelling hebben we $a \leq x_n \leq b$ voor alle natuurlijke n . Na limietovergang volgt $a = \lim_n a \leq \lim_n x_n \leq \lim_n b = b$. $\square$

2.1.30 Stelling. Als $x_n \rightarrow a \neq 0$, en $y_n \rightarrow +\infty$, dan is $x_n y_n \rightarrow +\infty$ als $a > 0$, en $x_n y_n \rightarrow -\infty$ als $a < 0$.

Bewijs. Als $a > 0$ (het andere geval is analoog), dan is $x_n > a/2$ zodra $n \geq N$. Gegeven $M > 0$ wordt dus $x_n y_n > aM/2$ (d.w.z. willekeurig groot), zodra n voldoende groot is. $\square$

2.2 Stelling van Bolzano-Weierstrass

2.2.1 Definitie. Een reële rij (x_n) heet **stijgend**¹ als

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$$

Geldt de sterkere eigenschap

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots,$$

dan noemen wij de rij **strikt stijgend**. Analoge definities gelden voor **dalend** en **strikt dalend**. Stijgende en dalende rijen vormen samen de **monotone** rijen.

2.2.2 Stelling. Is een stijgende reële rij (x_n) naar boven begrensd, dan convergeert ze, en is $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}^+} x_n$. In het andere geval divergeert ze naar $+\infty$.

Bewijs. Doordat de verzameling $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ niet leeg is, en naar boven begrensd door M , heeft ze een kleinste bovengrens, die men doorgaans kortweg noteert als $\sup_{n \in \mathbb{N}^+} x_n$. Stel $a = \sup_{n \in \mathbb{N}^+} x_n$. We gaan na dat $x_n \rightarrow a$, en nemen daartoe een willekeurige positieve ε . Doordat $a = \sup_{n \in \mathbb{N}^+} x_n$, bestaat er een $x_N \in A$ met $x_N > a - \varepsilon$. Door het stijgend karakter van x_n volgt hieruit dat

$$x_n > a - \varepsilon \quad \text{voor alle } n \geq N.$$

¹logischer zou zijn ‘niet-dalend’

Combineren we dit met

$$x_n \leq a \quad \text{voor alle } n,$$

dan verkrijgen we

$$a - \varepsilon < x_n \leq a < a + \varepsilon \quad \text{voor alle } n \geq N.$$

Is de rij (x_n) niet naar boven begrensd, dan geldt $\neg(\exists M \in \mathbb{R})(\forall N \in \mathbb{N})(x_N \leq M)$, m.a.w.

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N})(x_N > M).$$

Omdat de rij stijgend is, volgt hieruit dat $x_n > M$ voor alle $n \geq N$, m.a.w. (x_n) is divergent naar $+\infty$. $\square$

Analoog bewijst men:

2.2.3 Stelling. Een dalende reële rij (x_n) is naar beneden begrensd als en slechts als ze convergeert. In dat geval is $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}^+} x_n$. In het andere geval divergeert ze naar $-\infty$.

2.2.4 Opmerking. De beide vorige eigenschappen zijn vals in $\mathbb{Q}$.

2.2.5 Definitie. Een **deelrij** van een gegeven rij $a_1, a_2, \dots$ is, formeel gesteld, een beperking van de oorspronkelijke rij (die een functie is) tot een oneindige deelverzameling van haar definitieverzameling; informeel gesteld: een rij die ontstaan is door uit de gegeven rij termen weg te laten zonder de volgorde van de opgesomde termen te veranderen.

Zo zijn de rijen $1, 3, 5, 7, \dots, 2n + 1, \dots$ en $1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$ twee deelrijen van de rij $1, 2, 3, \dots$.

Een triviale deelrij vindt men door helemaal geen termen weg te laten, en de oorspronkelijke rij te behouden. Een algemene deelrij van de rij $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ heeft het uitzicht

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}, \dots$$

waarbij $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. We noteren een deelrij van $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ algemeen als $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^+}$. Merk op: n_k is het oude rangnummer van de k -de term die men laat staan. In de notatie n_k heeft n geen betekenis, k wel.

2.2.6 Opmerking. De nieuwe rangnummers hebben de eigenschap dat $n_k \geq k$. Inderdaad, $n_k = k$ als alle termen $a_1, \dots, a_k$ blijven staan; $n_k > k$ zodra één van die termen $a_1, \dots, a_k$ geschrapt wordt.

2.2.7 Stelling. Elke deelrij van een convergente rij is zelf convergent, en wel naar dezelfde limiet als de oorspronkelijke rij.

Bewijs. Stel dat $a_n \rightarrow a$, en dat $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ een deelrij is van $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$. Het gegeven is gelijkwaardig met

$$|a - a_n| < \varepsilon \quad \text{als } n \geq N.$$

In het bijzonder hebben we dus

$$|a - a_{n_k}| < \varepsilon \quad \text{als } n_k \geq N.$$

Wegens $n_k \geq k$ is $n_k \geq N$ als $k \geq N$. Vandaar

$$|a - a_{n_k}| < \varepsilon \quad \text{zodra } k \geq N.$$

$\square$

2.2.8 Gevolg. *Als een rij twee deelrijen heeft met verschillende limieten, dan is ze niet convergent.*

Nu een verrassende eigenschap, die aantoont dat in zekere zin geen chaotische rijen bestaan.

2.2.9 Stelling. *Elke reële rij heeft een monotone deelrij.*

Bewijs. Zij (x_n) de gegeven rij. We noemen $m \in \mathbb{N}^+$ een *topnummer* als de bijhorende term groter is dan alle volgende termen, m.a.w. als $x_m > x_k$ voor alle $k > m$. We onderscheiden twee gevallen.

Geval 1: er zijn oneindig veel topnummers. Kies een topnummer m_1 . Omdat er oneindig veel topnummers zijn kunnen we een topnummer $m_2 > m_1$ vinden, dan een topnummer $m_3 > m_2$ enzovoort, kortom we vinden topnummers $m_1 < m_2 < \dots$. Door de definitie van ‘topnummer’ is dan $x_{m_1} > x_{m_2} > \dots$, wat een dalende deelrij van (x_n) is.

Geval 2: er zijn maar een eindig aantal (eventueel geen) topnummers. Stel dat m het grootste topnummer is; als er geen topnummers zijn, kies dan $m = 1$. In beide gevallen is $n_1 := m + 1$ (groter dan het grootste topnummer) géén topnummer, zodat er een $n_2 > n_1$ bestaat waarvoor $x_{n_1} \leq x_{n_2}$. Ook n_2 (nog groter dan het grootste topnummer) is geen topnummer, zodat er een $n_3 > n_2$ bestaat waarvoor $x_{n_2} \leq x_{n_3}$. Op die manier verder gaand vinden we een stijgende deelrij $x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq x_{n_3} \leq \dots$ van (x_n) . $\square$

2.2.10 Gevolg. *Elke begrensde rij heeft een convergente deelrij.*

Bewijs. Wegens de stelling bezit de gegeven rij een monotone deelrij, die nu naar boven en naar onder begrensd is, en dus zeker convergeert. $\square$

2.2.11 Stelling (Stelling van de convergente deelrij, stelling van Bolzano-Weierstrass). *Als alle termen van een rij in het compact interval $[a, b]$ liggen, dan bezit die rij een deelrij die convergeert naar een punt van dat interval.*

Bewijs. Wegens 2.2.10 bezit de gegeven rij $(x_n)_n$ een convergente deelrij $(x_{n_k})_k$. Omdat $(x_{n_k})_k$ een rij uit het compact interval $[a, b]$ is, behoort haar limiet tot $[a, b]$. $\square$

Deze krachtige stelling heeft in het vervolg tal van toepassingen. Het nu volgende fundamentele ‘Kenmerk van Cauchy’ karakteriseert, merkwaardig genoeg, de convergentie van een rij zonder dat de limiet vernoemd wordt!

2.2.12 Stelling (Kenmerk van Cauchy²). *Een reële rij (x_n) convergeert als en slechts als er bij elke $\varepsilon > 0$ een natuurlijke N_ε bestaat met de eigenschap*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \text{als } n > N_\varepsilon, m > N_\varepsilon. \quad (2.2)$$

Bewijs. Zij eerst $x_n \rightarrow a$. Voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat er een N met de eigenschap dat

$$|x_n - a| < \varepsilon/2 \quad \text{als } n > N.$$

Als nu $n > N$ en $m > N$, dan hebben we

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

²Bolzano 1817; Cauchy 1821

Omgekeerd, veronderstel dat (2.2) geldt. We moeten aantonen dat de rij convergeert.

(a) Het eerste probleem is, een kandidaat-limiet te vinden. Hiertoe zullen we vooraf nagaan dat de gegeven rij begrensd is. Door (2.2) toe te passen met $\varepsilon = 1$ vinden we dat er een N bestaat waarvoor

$$|x_n - x_m| < 1 \quad \text{als } n > N, m > N.$$

De driehoeksongelijkheid leidt dan tot

$$|x_n| \leq |x_n - x_m| + |x_m| < |x_m| + 1 \quad \text{als } n > N \text{ en } m > N,$$

in het bijzonder is $|x_n| \leq |x_{N+1}| + 1$ als $n > N$. Vandaar geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n| \leq |x_{N+1}| + 1 + |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_N| =: M.$$

De rij (x_n) is dus begrensd, en heeft wegens 2.2.10 een convergente deelrij, stel $x_{n_k} \rightarrow \gamma$. Als de rij x_n convergeert, kan dit enkel naar γ zijn. Dat dit inderdaad het geval is, tonen we nu aan.

(b) Om te vinden dat $x_n \rightarrow \gamma$ kiezen we willekeurig $\varepsilon > 0$ en schrijven we

$$|x_n - \gamma| \leq \underbrace{|x_n - x_{n_k}|}_{=:A} + \underbrace{|x_{n_k} - \gamma|}_{=:B}.$$

Passen we (2.2) toe op A , dan blijkt dat $A < \varepsilon/2$ zodra $n > N_\varepsilon$ en $n_k > N_\varepsilon$, dus (want $n_k \geq k$) zodra $n > N_\varepsilon$ en $k > N_\varepsilon$. Anderzijds hebben we, wegens $x_{n_k} \rightarrow \gamma$, dat $B < \varepsilon/2$ zodra $n_k > N'_\varepsilon$, dus (want $n_k \geq k$) zeker zodra $k > N'_\varepsilon$. Noemen we $M_\varepsilon = \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$, dan volgt $|x_n - \gamma| < \varepsilon$ zodra $n, k > M_\varepsilon$. Maar k komt in deze formule niet meer voor! Vandaar hebben we $|x_n - \gamma| < \varepsilon$ zodra $n > M_\varepsilon$. $\square$

2.2.13 Opmerking. Het kenmerk van Cauchy drukt op een andere manier uit dat de reële rechte geen gaten bevat, en is vals in $\mathbb{Q}$.

Hier een tweede fundamentele toepassing van Bolzano-Weierstrass.

2.2.14 Stelling (Stelling van de vernestelde compacte intervallen³).

Is $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots$ een rij⁴ van nietlege compacte intervallen⁵ met de eigenschap

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \dots,$$

dan is $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} [a_n, b_n] \neq \emptyset$, m.a.w. er bestaat minstens één reële ξ die tot alle $[a_n, b_n]$'s behoort.

Als bovendien

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0, \tag{2.3}$$

dan is die $\xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} [a_n, b_n]$ uniek, en

$$\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

³Cantor 1884

⁴een 'rij' intervallen is een aftelbare verzameling van intervallen, opeenvolgend genummerd

⁵Denk eraan dat $\emptyset$ ook een compact interval is

Bewijs. We bouwen een rij op door uit elke $[a_n, b_n]$ één element te kiezen: $x_1 \in [a_1, b_1]$, $x_2 \in [a_2, b_2]$, $\dots$. De rij (x_n) is een rij uit $[a_1, b_1]$, en is dus begrensd. Door de stelling van de convergente deelrij bestaat er een deelrij $x_{n_k} \rightarrow \xi \in [a_1, b_1]$. De limiet ξ behoort niet alleen tot $[a_1, b_1]$, maar ook tot $[a_N, b_N]$ voor elke N . Immers, alle termen x_i behoren tot $[a_N, b_N]$, eventueel op een eindig aantal termen $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ na. Daardoor behoren ook de termen x_{n_k} , eventueel op een eindig aantal termen na, tot $[a_N, b_N]$ en bijgevolg ligt de limiet van deze rij, ξ , in $[a_N, b_N]$.

Veronderstel nu dat ook (2.3) geldt. Neem eens aan dat, behalve ξ , ook $\xi' \neq \xi$ tot alle $[a_n, b_n]$'s behoort. Dan hebben we voor alle $n \in \mathbb{N}$ dat $b_n - a_n \geq |\xi - \xi'| > 0$. Dit is in strijd met (2.3), dat immers inhoudt dat $b_n - a_n < |\xi - \xi'|$ zodra n groot genoeg is.

Tenslotte hebben we voor elke $n \in \mathbb{N}$ dat $\xi \in [a_n, b_n]$, zodat

$$|a_n - \xi| \leq b_n - a_n \rightarrow 0.$$

Bijgevolg hebben we $a_n \rightarrow \xi$ en analoog $b_n \rightarrow \xi$. Wegens 2.1.8 is ξ uniek. $\square$

2.2.15 Opmerkingen.

1. Deze stelling drukt op een andere manier uit dat $\mathbb{R}$ geen gaten bevat, en is vals in $\mathbb{Q}$.
2. Als één van de gegeven intervallen *leeg* is, dan is $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} [a_n, b_n] = \emptyset$.

Met de nu volgende stelling toonde Cantor als eerste aan dat er verschillende gradaties van oneindigheid bestaan, met name dat een reëel interval echt *meer* elementen bevat dan $\mathbb{Q}$.

2.2.16 Stelling (Cantor, 1874). Een compact interval $[a, b]$ met $a < b$ is niet aftelbaar.

Bewijs. Veronderstel dat de elementen van $[a, b]$ als één rij $x_1, x_2, \dots$ kunnen geschreven worden. We zullen aantonen dat $[a, b]$ minstens één element ξ heeft dat níét in die rij staat, waarmee een tegenstrijdigheid verkregen is. Het bewijs gebruikt het volgende elementaire feit: *als drie aaneensluitende compacte intervallen gegeven zijn, stel $[t, u]$, $[u, v]$ en $[v, w]$ met $t < u < v < w$, dan kan een gegeven reëel getal niet tot alle drie behoren* (hoogstens tot twee, als het gegeven getal toevallig u of v is).

We verdelen $[a, b]$ in drie aaneensluitende compacte intervallen met lengte $(b - a)/3$. Omdat x_1 niet tot alle drie kan behoren, kunnen we een van die intervallen kiezen dat x_1 niet bevat; noem het $[a_1, b_1]$. We verdelen dan $[a_1, b_1]$ in drie aaneensluitende compacte intervallen met lengte $(b - a)/9$, en noemen één van die drie dat x_2 niet bevat: $[a_2, b_2]$. Zo verder gaande construeren we een rij van compacte intervallen waarvoor

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots, \quad b_n - a_n \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

$$x_n \notin [a_n, b_n] \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.5)$$

Wegens de voorafgaande stelling bestaat er een $\xi \in [a, b]$ die tot elke $[a_n, b_n]$ behoort. Deze ξ kan onmogelijk een van de x_n 's zijn, want wegens (2.5) behoort geen enkele x_n tot *alle* intervallen $[a_n, b_n]$. $\square$

2.2.17 Gevolg. $\mathbb{R}$ is niet aftelbaar.

Bewijs. Als we $\mathbb{R}$ konden aftellen dan konden we ook, door elementen te schrappen, bijvoorbeeld het interval $[0, 1]$ aftellen. Dat kan niet, zoals aangetoond in de stelling. $\square$

2.2.18 Quiz. Waar of niet waar?

1. Elke begrensde rij van reële getallen heeft een convergente deelrij.
2. Elke convergente rij van reële getallen heeft een begrensde deelrij.

2.3 Oefeningen

Welke van de volgende rijen zijn (a) naar boven begrensd? (b) convergent? (c) divergent naar $\pm\infty$? In geval van convergentie: bepaal de limiet.

- (1) $(\frac{n+1}{n})$ (2) $(\frac{1}{2n})$ (3) $(\frac{3}{n+2} - n)$ (4) $\frac{1}{2^n}$ (5) $(-n^2 + \frac{1}{n})$ (6) $\frac{n^2-n}{n^3}$.

Hoofdstuk 3

Limieten van functies

3.1 Limieten van functies

We bespreken in dit hoofdstuk limieten van *functies* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; in het vorige hoofdstuk ging het over limieten van *rijen* (x_n) .

3.1.1 Definities.

1. In $\mathbb{R}$ is de **open bal met middelpunt $a \in \mathbb{R}$ en straal $R \in \mathbb{R}^+$** een andere benaming voor het open interval $]a - R, a + R[$. Soms noteren we hiervoor $B(a, R)$.
2. Het punt a is een **ophopingspunt** van een verzameling V (waartoe het niet hoeft te behoren) als voor elke $R > 0$ geldt dat $B(a, R) \cap V$ oneindig veel elementen heeft.
3. Een deelverzameling V van $\mathbb{R}$ heet een **omgeving** van a , en a zelf heet een **inwendig punt** van V als er een $R > 0$ bestaat waarvoor

$$]a - R, a + R[\subseteq V.$$

4. Het **inwendige** V° van een verzameling V bestaat uit alle inwendige punten van die verzameling.
5. Is V een omgeving van a , dan noemt men $V \setminus \{a\}$ een **doorprikte omgeving**¹ van a .

3.1.2 Definitie. Zij f een functie $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, met domein $\mathcal{D}$, en zij a een ophopingspunt van $\mathcal{D}$. Men noemt $L \in \mathbb{R}$ de **limiet van f voor x naderend tot a** als de volgende formule geldt:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D})(0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon),$$

of (wat hetzelfde is)

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D} \setminus \{a\})(|x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon). \quad (3.1)$$

We schrijven hiervoor ook dat (voor een willekeurige $\varepsilon > 0$)

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{zodra } 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon, x \in \mathcal{D}.$$

¹In het Engels: *punctured neighbourhood*

3.1.3 Notatie. Als L de limiet van f is voor x naderend tot a , dan noteren we $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ of ‘ $f(x) \rightarrow L$ als $x \rightarrow a$ ’.

Dat de limiet, als die bestaat, enig is, toont men op dezelfde wijze aan als voor de limiet van rijen.

3.1.4 Opmerkingen.

1. Het al dan niet bestaan van de limiet van f in a , en de waarde ervan, wordt niet beïnvloed door het feit of f in a gedefinieerd is of niet, en zo ja, wat $f(a)$ is.
2. Doordat a een ophopingspunt van $\mathcal{D}$ is bestaan er altijd $x \in \mathcal{D} \setminus \{a\}$ met $|x - a| < \delta$, want $\mathcal{D} \cap B(a, \delta)$ heeft oneindig veel elementen, dus ook oneindig veel elementen verschillend van a .
3. Men mag in de definitie 3.1.2 ook schrijven $0 < |x - a| \leq \delta$, maar niet $0 \leq |x - a| \leq \delta$. De eventuele waarde van f in a mag immers geen rol spelen.

De volgende stelling toont aan dat we ‘limiet van een functie’ kunnen uitdrukken d.m.v. limieten van rijen, zoals beschouwd in het vorige hoofdstuk.

3.1.5 Stelling (Rijenkenmerk voor limieten). *De eigenschap $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ is gelijkwaardig met: voor elke rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ uit $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ die naar a convergeert, convergeert de rij van de functiewaarden $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^+}$ naar L .*

Bewijs. Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, dan hebben we

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{zodra } 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon, x \in \mathcal{D}.$$

In het bijzonder hebben we voor elke rij $\mathcal{D} \setminus \{a\} \ni x_n \rightarrow a$ dat

$$|f(x_n) - L| < \varepsilon \quad \text{zodra } |x_n - a| < \delta_\varepsilon.$$

Wegens $x_n \rightarrow a$ is $|x_n - a| < \delta_\varepsilon$ voor $n \geq N$. Vandaar

$$|f(x_n) - L| < \varepsilon \quad \text{zodra } n > N.$$

Omgekeerd, zij $f(x_n) \rightarrow L$ voor elke rij $\mathcal{D} \setminus \{a\} \ni x_n \rightarrow a$. We bewijzen uit het ongerijmde dat $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Veronderstel dus dat (3.1) vals is. Dan zou de formule

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathcal{D} \setminus \{a\})(|x - a| < \delta \ \& \ |f(x) - L| \geq \varepsilon)$$

waar zijn. Kies zo’n uitzonderlijke ε , stel ε_0 . Nemen we $\delta = 1$, dan vinden we een $x_1 \in \mathcal{D} \setminus \{a\}$ met

$$|x_1 - a| < 1 \quad \text{en} \quad |f(x_1) - L| \geq \varepsilon_0.$$

Kies daarna $\delta = 1/2$, wat een $x_2 \in \mathcal{D} \setminus \{a\}$ oplevert met

$$|x_2 - a| < 1/2 \quad \text{en} \quad |f(x_2) - L| \geq \varepsilon_0.$$

Gaan we zo verder, dan bouwen we in $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ een rij $x_1, x_2, \dots$ op die blijkbaar naar a convergeert, want $|x_n - a| < 1/n < \varepsilon$ zodra $n > 1/\varepsilon$, maar waarvoor de rij $f(x_1), f(x_2), \dots$ niet convergent is naar L , want $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$ voor alle n . Dat is strijdig met het gegeven. $\square$

3.1.6 Gevolg. De functie f heeft een limiet in a als en slechts als er geldt: voor elke rij uit $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ die convergeert naar a is de rij van de functiewaarden convergent.

Bewijs. Zij $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Uit de voorafgaande stelling volgt dat $f(x_n) \rightarrow L$ voor elke rij uit $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ die convergeert naar a .

Omgekeerd, veronderstel dat de rij $(f(x_n))$ convergent is voor elke rij $x_n \rightarrow a$ uit $\mathcal{D} \setminus \{a\}$. Dan is $\lim_n f(x_n)$ altijd hetzelfde getal, welke rij $x_n \rightarrow a$ men ook kiest in $\mathcal{D} \setminus \{a\}$. Inderdaad, neem eens twee van die rijen, stel (x_n) en (x'_n) . De rij $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots$ is dan ook een rij uit $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ die convergeert naar a . Door het gegeven is de rij $f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \dots$ convergent, stel naar L . Elk van de twee deelrijen $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$ en $f(x'_1), f(x'_2), f(x'_3), \dots$ is dus ook convergent naar L . Wegens de voorafgaande stelling hebben we dan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. $\square$

3.1.7 Gevolg. Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ bestaan, dan is ook²

1. $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow a} f(x)|$
2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$, als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
5. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, als $f(x) \leq g(x)$ in een doorprikte omgeving van a
6. Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ en $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ in een doorprikte omgeving van a , dan is ook $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$.

Bewijs. Via het rijenkenmerk herleiden deze eigenschappen zich tot de corresponderende eigenschappen voor limieten van rijen. Bijv.:

2. Zij willekeurig (x_n) een rij uit $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ die naar a convergeert. Door het gegeven en het rijenkenmerk is dan $f(x_n) \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) =: L \neq 0$. Dan is $1/f(x_n) \rightarrow 1/L$. Door het rijenkenmerk is dan $1/f(x) \rightarrow 1/L$. $\square$

3.1.8 Definitie. Men beschouwt ook limieten met een beperking van de veranderlijke tot een deelverzameling $A \subseteq \mathbb{R}$. Zo betekent

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = L \quad \text{dat} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f/(A \cap \mathcal{D}))(x) = L.$$

In (3.1) moet men dan $\mathcal{D}$ vervangen door $A \cap \mathcal{D}$.

I.h.b. gebeurt het vaak dat men enkel kijkt naar punten rechts van a . Men noemt dan $\lim_{x \rightarrow a, x \in]a, +\infty[} f(x)$ de **rechterlimiet** van f voor x naderend tot a (of kortweg: de rechterlimiet van f in a). Men noteert dit doorgaans beknopter als

$$\lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x) \quad \text{of} \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \quad \text{of} \quad \lim_{x \nearrow a} f(x) \quad \text{of} \quad f(a+).$$

Verder wordt de uitdrukking $\lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x) = L$ ook op de volgende manieren genoteerd:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow L \text{ als } x \rightarrow a+ \\ f(x) &\rightarrow L \text{ als } x \nearrow a \\ |f(x) - L| &< \varepsilon \quad \text{zodra } a < x < a + \delta_\varepsilon, x \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

²de rekenregels waarin zowel f als g voorkomen vereisen dat a een ophopingspunt is van $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$

3.1.9 Opmerking. Men mag ook schrijven $a < x \leq a + \delta_\varepsilon$, maar niet $a \leq x \leq a + \delta_\varepsilon$. De eventuele waarde van f in a mag immers geen rol spelen.

Analoge definities en notaties gelden voor de **linkerlimiet**.

3.1.10 Stelling. Zij f functie $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, met domein $\mathcal{D}$, en zij a een ophopingspunt van zowel $\{x \in \mathcal{D} \mid x > a\}$ als van $\{x \in \mathcal{D} \mid x < a\}$.

1. Als de limiet van f in a bestaat, dan bestaan ook rechter- en linkerlimiet, en zijn gelijk
2. Bestaan rechter- en linkerlimiet van f in a , en zijn ze gelijk, dan bestaat ook de limiet van f in a , en de limiet is de gemeenschappelijke waarde van rechter- en linkerlimiet.

Bewijs.

$$\begin{aligned}
 f(a+) = f(a-) = L &\iff \begin{cases} |f(x) - L| < \varepsilon & \text{zodra } 0 < x - a < \delta_1, x \in \mathcal{D} \\ |f(x) - L| < \varepsilon & \text{zodra } 0 < a - x < \delta_2, x \in \mathcal{D} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} |f(x) - L| < \varepsilon & \text{zodra } 0 < x - a < \delta, x \in \mathcal{D} \\ |f(x) - L| < \varepsilon & \text{zodra } 0 < a - x < \delta, x \in \mathcal{D} \end{cases} \\
 &\iff |f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{zodra } 0 < |x - a| < \delta, x \in \mathcal{D} \\
 &\iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.
 \end{aligned}$$

Voor de implicatie ‘ $\Rightarrow$ ’ volstaat het immers $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ te kiezen. □

Uit 3.1.6 volgt i.h.b.:

3.1.11 Gevolg. De functie f heeft een rechterlimiet in a als en slechts als er geldt: voor elke rij uit $\{x \in \mathcal{D} \mid x > a\}$ die convergeert naar a is de rij van de functiewaarden convergent

en analoog voor de linkerlimiet.

3.1.12 Stelling. Als f in a een limiet bezit, dan bestaat er een omgeving van a waarover f begrensd is.³

Bewijs. Zij $f(x) \rightarrow L$ voor $x \rightarrow a$. Kiezen we $\varepsilon = 1$ in de definitie van limiet, dan vinden we

$$L - 1 < f(x) < L + 1 \quad \text{zodra } 0 < |x - a| < \delta, x \in \mathcal{D},$$

zodat f naar boven en naar onder begrensd is op een doorprikte omgeving van a .

Is bovendien f gedefinieerd in a , dan kunnen we schrijven dat

$$\min\{f(a), L - 1\} \leq f(x) \leq \max\{f(a), L + 1\} \quad \text{voor } |x - a| < \delta, x \in \mathcal{D}.$$

□

3.1.13 Stelling (Behoud van teken). Als $f(x) \rightarrow L$ voor $x \rightarrow a$, en $L > 0$ (resp. $L < 0$), dan bestaat er een doorprikte omgeving van a waarover f positief (resp. negatief) is.

³Dit betekent niet dat f op heel deze omgeving A gedefinieerd moet zijn, maar wel dat f begrensd is op $A \cap \mathcal{D}_f$.

Bewijs. Zij $L > 0$. Neem, in de definitie (3.1), $\varepsilon = L/2$. Er volgt dat

$$0 < \frac{L}{2} < f(x) < \dots \quad \text{voor } 0 < |x - a| < \delta, x \in \mathcal{D}.$$

Analoog als $L < 0$. □

3.1.14 Opmerking. In feite geldt er niet alleen dat $f(x) > 0$ in die doorprikte omgeving, maar zelfs dat er een constante $C (= L/2)$ bestaat waarvoor $f(x) > C > 0$ in die doorprikte omgeving. Men zegt in zo'n geval dat f *positief van nul afgescheiden* is.

Geheel analoog bewijst men eenzijdige versies van deze stellingen.

3.1.15 Definitie. Zij a een ophopingspunt van het domein $\mathcal{D}$ van de functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Men zegt dat f **divergeert naar $+\infty$ voor x naderend tot a** als de volgende formule geldt:

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D})(0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > M),$$

wat we afkorten als

$$f(x) > M \quad \text{zodra } 0 < |x - a| < \delta_M, x \in \mathcal{D}.$$

Als die formule geldt noteren we $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ of kortweg ' $f(x) \rightarrow +\infty$ als $x \rightarrow a$ '.

3.1.16 Voorbeeld. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

3.1.17 Definitie. Men zegt dat f **divergeert naar $-\infty$ voor x naderend tot a** als de volgende formule geldt:

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D})(0 < |x - a| < \delta \implies f(x) < M),$$

wat we afkorten als

$$f(x) < M \quad \text{zodra } 0 < |x - a| < \delta_M, x \in \mathcal{D}.$$

Als die formule geldt noteren we $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ of kortweg ' $f(x) \rightarrow -\infty$ als $x \rightarrow a$ '.

3.1.18 Opmerking. De zegswijze **de limiet van f bestaat als x nadert tot a** betekent dat f in a een limiet $L \in \mathbb{R}$ bezit, niet $L = +\infty$ of $L = -\infty$. De z.g. **oneigenlijke limieten** $+\infty$ of $-\infty$ vallen daar niet onder, behalve als dit uitdrukkelijk gezegd wordt.

Analoog als in 3.1.5 toont men aan:

3.1.19 Stelling (Rijenkenmerk voor divergentie). *De eigenschap $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ is gelijkwaardig met: voor elke rij (x_n) uit $\mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ die naar a convergeert, divergeert de rij $(f(x_n))$ naar $+\infty$.*

3.1.20 Stelling. *Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$, en $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, dan is $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = +\infty$ als $L > 0$ en $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = -\infty$ als $L < 0$.*

Bewijs. Via het rijenkenmerk herleidt deze rekenregel zich tot 2.1.30. □

Het limietbegrip laat vele varianten toe. Definieer zelf, bij wijze van oefening, wat de volgende formules betekenen voor een functie f die gedefinieerd is voor alle $x \geq x_0$:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow L && \text{als } x \rightarrow +\infty \\ f(x) &\rightarrow +\infty && \text{als } x \rightarrow +\infty \\ f(x) &\rightarrow -\infty && \text{als } x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

en, voor een functie f die gedefinieerd is voor alle $x \leq x_0$:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow L && \text{als } x \rightarrow -\infty \\ f(x) &\rightarrow +\infty && \text{als } x \rightarrow -\infty \\ f(x) &\rightarrow -\infty && \text{als } x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Voor convergentie naar L ($L \in \mathbb{R}$) als $x \rightarrow +\infty$ of $x \rightarrow -\infty$ gelden analoge rekenregels als voor $x \rightarrow a$ ($a \in \mathbb{R}$), inclusief rijkenmerk, met analoge bewijzen.

3.1.21 Voorbeeld. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

3.1.22 Voorbeeld. Voor elke $n \in \mathbb{N}^+$ is $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$.

Bewijs. Voor elke $M > 0$ en $n \in \mathbb{N}^+$ is $x^n > M$ zodra $x > 1 + M$ want dan is $x^n > x > 1 + M > M$. $\square$

3.1.23 Toepassing (Gedrag op oneindig van nietconstante reële veeltermen). *Is $n \geq 1$, dan is*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = \begin{cases} +\infty & \text{als } a_n > 0 \\ -\infty & \text{als } a_n < 0 \end{cases}.$$

Bewijs. We hebben

$$P(x) := a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \cdots + a_n \right).$$

Voor $x \rightarrow +\infty$ nadert de tweede factor tot $a_n > 0$. Het gevraagde volgt dan uit 3.1.20. $\square$

Uit deze resultaten kan men gemakkelijk afleiden wat $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)$ is. Deze limiet is nl. $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(-x)$, en

$$P(-x) = a_0 - a_1x + \cdots + (-1)^n a_nx^n.$$

Voor n even heeft $P(-x)$ een hoogstegraadscoëfficiënt die hetzelfde teken heeft als die van $P(x)$, zodat

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x).$$

Is n oneven, dan volgt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x).$$

3.1.24 Quiz. Waar of niet waar?

1. Een ophopingspunt van $A \subseteq \mathbb{R}$ is steeds een inwendig punt van A .
2. Een inwendig punt van $A \subseteq \mathbb{R}$ is steeds een ophopingspunt van A .

Hoofdstuk 4

Continuïteit

4.1 Continuïteit in een vast punt

4.1.1 Definitie. Zij f een functie $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met domein $\mathcal{D}$, en $a \in \mathcal{D}$ een ophopingspunt van $\mathcal{D}$.¹ Men zegt dat f in a **continu** is als geldt:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (4.1)$$

Voluit geschreven betekent de formule (4.1)

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D})(0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon). \quad (4.2)$$

Zij is equivalent met

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D})(|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon) \quad (4.3)$$

Inderdaad, als (4.2) geldt, dan geldt ook het schijnbaar sterkere (4.3), want voor het extra punt $x = a$ dat gecontroleerd moet worden is de conclusie $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ steeds waar.

4.1.2 Opmerkingen.

1. Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq f(a)$, dan is f discontinu in a . Het volstaat evenwel de functie in a te herdefiniëren als $f(a) := L$ opdat de nieuwe functie continu zou zijn in a . Om die reden noemt men een punt a waar $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bestaat, maar verschillend is van $f(a)$, een **ophefbare discontinuïteit**.
2. Als $f(a+)$ en $f(a-)$ bestaan maar verschillend zijn, dan zegt men dat f in a een **sprongpunt** heeft, of een **discontinuïteit van de eerste soort**. Een eenvoudig voorbeeld van discontinuïteit die géén sprongpunt is vindt men bij de functie die $\frac{1}{x}$ is voor $x \neq 0$ en die 0 is voor $x = 0$.

Drukken wij (4.1) uit d.m.v. het rijkenmerk voor limieten 3.1.5, dan vinden we onmiddellijk

4.1.3 Stelling. *De functie f is continu in $a \in \mathcal{D}$ als en slechts als er geldt: voor elke rij uit $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ die convergeert naar a is de rij van de functiewaarden convergent naar $f(a)$.*

¹De resultaten over continuïteit die we zullen geven zijn ook waar (weliswaar als triviale implicaties met een vals antecedent) voor punten van $\mathcal{D}$ die geen ophopingspunt van $\mathcal{D}$ zijn. Om die reden besteden we er verder geen aandacht aan.

Hieruit leiden we af:

4.1.4 Stelling (Rijenkenmerk voor continuïteit). *De functie f is continu in $a \in \mathcal{D}$ als en slechts als er geldt: voor elke rij uit $\mathcal{D}$ die convergeert naar a is de rij van de functiewaarden convergent naar $f(a)$.*

Bewijs. $\Rightarrow$: van een gegeven rij (x_n) uit $\mathcal{D}$ bekijken we de deelrij (x_{n_k}) van die elementen uit de rij waarvoor $x_n \neq a$. Door de vorige stelling is $f(x_{n_k}) \rightarrow f(a)$, m.a.w.

$$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{zodra } n \geq N \text{ en } x_n \neq a.$$

Omdat deze ongelijkheid triviaal geldt voor de overige $n \geq N$ (waarvoor $x_n = a$), is voldaan aan de definitie van $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

$\Leftarrow$: volgt onmiddellijk uit de vorige stelling. $\square$

4.1.5 Gevolg. *Zij f een functie $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met domein $\mathcal{D}$, en zij $a \in \mathcal{D}$. Als men in $\mathcal{D}$ een rij kan vinden die naar a convergeert en waarvoor de rij van de functiewaarden niet naar $f(a)$ convergeert, dan is f niet continu in a .*

4.1.6 Stelling. *Is f continu in a , dan is f begrensd over een omgeving van a .*

Bewijs. Dit volgt uit 3.1.12, want f is in a gedefinieerd en heeft er een limiet. $\square$

4.1.7 Stelling. *Beschouw twee functies f en $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, beide continu in a . Dan geldt:*

1. $f + g$, $f - g$ en fg zijn continu in a
2. als $g(a) \neq 0$, dan is f/g continu in a
3. $|f|$ is continu in a
4. $f(a) \leq g(a)$, als $f(x) \leq g(x)$ in een doorprikte omgeving van a .

Bewijs. We bewijzen enkel 3., de overige bewijzen verlopen analoog. Door de overeenkomstige eigenschap voor limieten weten we dat $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow a} f(x)|$ terwijl het gegeven is, dat $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Vandaar $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |f(a)|$. $\square$

Voorbeeld: de functie $\frac{1}{x}$ is continu in elk punt $a \neq 0$.

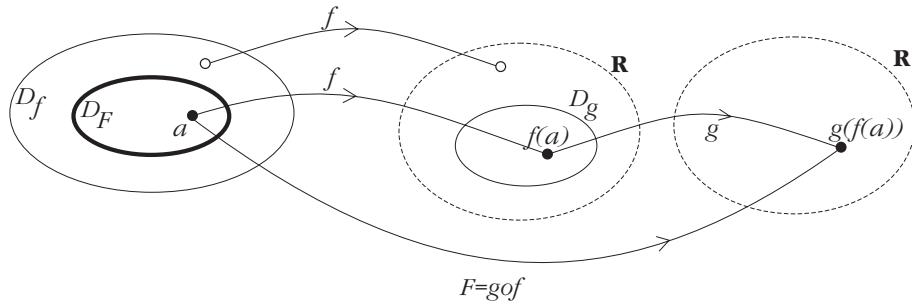
4.1.8 Gevolg. *Een reële veeltermfunctie*

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad (a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$$

is in elk punt continu.

Bewijs. De functie $x \mapsto x$ is in elk punt x_0 continu (bewijs: $|x - x_0| < \varepsilon$ zodra $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$). Ook constante functies zijn overal continu. Dan is ook elke eenterm $x \mapsto x^k$ in elk punt x_0 continu (product van continue functies) en bijgevolg ook P (som van continue functies). $\square$

4.1.9 Stelling. *Is f continu in a en g continu in $f(a)$, dan is de samengestelde functie $g \circ f$ eveneens continu in a .*



Figuur 4.1: Samenstelling van f en g .

Bewijs. Stel $F = g \circ f$, en noem het domein van f , g en F resp. $\mathcal{D}_f$, $\mathcal{D}_g$ en $\mathcal{D}_F$. Zij (x_n) een rij in $\mathcal{D}_F$ met $x_n \rightarrow a$. Dan bestaan $F(x_n) = g(f(x_n))$, zodat $x_n \in \mathcal{D}_f$ en $f(x_n) \in \mathcal{D}_g$. Omdat f continu is in a , is door het rijkenmerk

$$f(x_n) \rightarrow f(a).$$

Omdat g continu is in $f(a)$, volgt hieruit (opnieuw rijkenmerk)

$$g(f(x_n)) \rightarrow g(f(a)), \quad \text{m.a.w.} \quad F(x_n) \rightarrow F(a).$$

Dit betekent dat F continu is in a (opnieuw wegens het rijkenmerk). □

4.1.10 Opmerking. We zullen de volgende verwante regel vaak informeel toepassen:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \rightarrow b, \text{ als } x \rightarrow a \\ g(y) \rightarrow c, \text{ als } y \rightarrow b \end{array} \right\} \implies g(f(x)) \rightarrow c, \text{ als } x \rightarrow a.$$

Concreet schrijven we dan doorgaans: ‘als $x \rightarrow a$, dan $f(x) \rightarrow b$, en dus $g(f(x)) \rightarrow c$.’ Het bewijs verloopt analoog via het rijkenmerk. Merk op dat men het rijkenmerk voor limieten enkel op g kan toepassen als $f(x) \neq b$ (in een omgeving van a). Als hieraan niet voldaan is, moet men veronderstellen dat g continu is in b .

Eenvoudig maar zeer nuttig is

4.1.11 Stelling (Behoud van teken). *Is f continu in a en is $f(a) \neq 0$, dan behoudt f haar teken in een omgeving van a .*

Bewijs. Omdat $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, volgt dit uit 3.1.13. □

Analoog met eenzijdige limieten definieert men eenzijdige continuïteit.

4.1.12 Definitie. Zij f een functie $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, met domein $\mathcal{D}$. Men zegt dat f in $a \in \mathcal{D}$ (ophopingspunt van $\{x \in \mathcal{D} \mid x > a\}$) **rechtscontinu** is als

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a).$$

Uitgewerkt betekent dit, dat er bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat met de eigenschap dat

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{voor alle } a < x < a + \delta, x \in \mathcal{D}.$$

Analoog voor **linkscontinu**.

Wegens 3.1.10 is ‘continu in a ’ gelijkwaardig met ‘rechts- en linkscontinu in a ’.

4.2 Continuïteit over een verzameling

4.2.1 Definitie. Men zegt dat f , met domein $\mathcal{D}$, **continu in** (of: **over**) een verzameling $A \subseteq \mathcal{D}$ is als de beperking $f|_A$ in elk punt van die verzameling continu is, m.a.w. als

$$\lim_{t \rightarrow x, t \in A} f(t) = f(x), \quad \forall x \in A$$

of nog, als

$$(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in A)(|t - x| < \delta \implies |f(t) - f(x)| < \varepsilon). \quad (4.4)$$

De δ uit deze formule hangt zowel van x als van ε af, en wordt daarom soms genoteerd als $\delta_{x,\varepsilon}$.

4.2.2 Opmerkingen.

1. De formule (4.4) drukt niet uit dat f in elk punt van A continu is, want de formule voor dat laatste is:

$$(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in \mathcal{D})(|t - x| < \delta \implies |f(t) - f(x)| < \varepsilon)$$

dus met $\mathcal{D}$ waar in (4.4) een A stond.

2. Analoo: ‘ f is continu in A ’ is niet noodzakelijk gelijkwaardig met

$$\lim_{t \rightarrow x} f(t) = f(x), \quad \forall x \in A.$$

3. Als f continu is over V , dan ook over elke deelverzameling van V .

Het belangrijkste is continuïteit over een *open* interval $]a, b[$ of een *compact* interval $[a, b]$.

4.2.3 Stelling. De functie f is continu over $]a, b[\subseteq \mathcal{D}$ juist als ze in elk punt van $]a, b[$ continu is.

Bewijs. In formulevorm luidt ‘ f is continu over $]a, b[$ ’:

$$(\forall x \in]a, b[)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in]a, b[)(|t - x| < \delta \implies |f(t) - f(x)| < \varepsilon) \quad (4.5)$$

en ‘ f is continu in elk punt van $]a, b[$ ’:

$$(\forall x \in]a, b[)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in \mathcal{D})(|t - x| < \delta \implies |f(t) - f(x)| < \varepsilon). \quad (4.6)$$

Wegens $]a, b[\subseteq \mathcal{D}$ hebben we zeker al dat $(4.6) \implies (4.5)$. Om de omgekeerde implicatie te vinden onderstellen we (4.5) geldig. Kies $x \in]a, b[$ en $\varepsilon > 0$. De $\delta_{x,\varepsilon}$ die (4.5) levert kunnen we zo klein veronderstellen (desnoods door te verkleinen) dat $]x - \delta, x + \delta[\subseteq]a, b[$. Die δ maakt dan (4.6) geldig, want als $t \in \mathcal{D}$ en $|t - x| < \delta$, dan is $t \in]a, b[$, zodat $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ wegens (4.5). $\square$

4.2.4 Stelling. De functie f is continu over $[a, b] \subseteq \mathcal{D}$ als en slechts als

1. f is continu in elk punt $x \in]a, b[$
2. f is rechtscontinu in a

3. f is linkscontinu in b .

Bewijs. Bij definitie betekent ‘ f is continu over $[a, b] \subseteq \mathcal{D}$ ’ dat

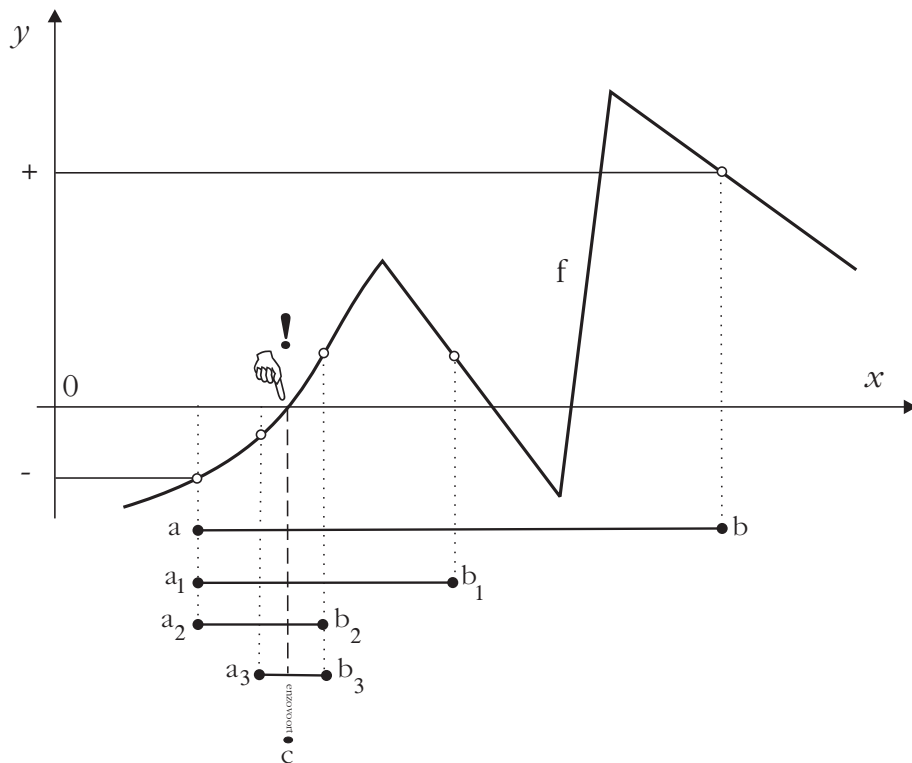
$$(\forall x \in [a, b])(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in [a, b])(|t - x| < \delta \implies |f(t) - f(x)| < \varepsilon).$$

Die formule is gelijkwaardig met het volgende drietal, waarin achtereenvolgens $a < x < b$, $x = a$ en $x = b$ genomen is:

$$\begin{cases} (\forall x \in]a, b[)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in [a, b])(|t - x| < \delta \implies |f(t) - f(x)| < \varepsilon) \\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in [a, b])(a < t < a + \delta \implies |f(t) - f(a)| < \varepsilon) \\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in [a, b])(b - \delta < t < b \implies |f(t) - f(b)| < \varepsilon). \end{cases}$$

In de drie gevallen kunnen we de δ 's zo klein nemen dat de t 's automatisch binnen $[a, b]$ blijven, zodat we telkens $t \in \mathcal{D}$ zouden kunnen schrijven i.p.v. $t \in [a, b]$. Zo ziet men dat die formules achtereenvolgens betekenen: f continu in elk punt van $]a, b[$, f rechtscontinu in a , f linkscontinu in b . $\square$

4.2.5 Stelling (Tussenwaardestelling, bijzonder geval). *Zij $a < b$. Als $f(a) < 0$ en $f(b) > 0$ (resp. als $f(a) > 0$ en $f(b) < 0$), en als f continu is over het compact interval $[a, b]$, dan bestaat er minstens één $c \in]a, b[$ waarvoor $f(c) = 0$.*



Figuur 4.2: Localisatie van een nulpunt in opeenvolgende gehalveerde intervallen.

Bewijs. We nemen aan dat $f(a) < 0$ en $f(b) > 0$. (Het geval $f(a) > 0$ en $f(b) < 0$ verloopt helemaal analoog.) Noem $c_0 := (a + b)/2$. Als $f(c_0) = 0$, dan is het bewijs voltooid. Als

$f(c_0) \neq 0$, dan is $f(c_0) < 0$ ofwel $f(c_0) > 0$. In het eerste geval noemen we $a_1 := c_0$ en $b_1 := b$, in het tweede geval $a_1 := a$ en $b_1 := c_0$. In elk geval is het nieuwe interval $[a_1, b_1]$ half zo lang als het oorspronkelijke interval $[a, b]$, en is $f(a_1) < 0$ en $f(b_1) > 0$.

Noem $c_1 := (a_1 + b_1)/2$. Als $f(c_1) = 0$, dan is het bewijs voltooid. Als $f(c_1) \neq 0$, dan is $f(c_1) < 0$ ofwel $f(c_1) > 0$. In het eerste geval noemen we $a_2 := c_1$ en $b_2 := b_1$, in het tweede geval $a_2 := a_1$ en $b_2 := c_1$. In elk geval is de lengte van het nieuwe interval $[a_2, b_2]$ maar een vierde meer van de lengte van het oorspronkelijke interval $[a, b]$, en is $f(a_2) < 0$ en $f(b_2) > 0$.

Zo gaan we verder. Ofwel vinden we na een eindig aantal halveringen van $[a, b]$ een nulpunt van f , ofwel is dit niet het geval. In het laatste geval beschikken we over een rij van vernestelde compacte intervallen

$$[a, b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots \quad \text{met} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b - a}{2^n} = 0.$$

Er bestaat dus een unieke $c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} [a_n, b_n]$, en

$$c = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

Nu komt de continuïteit van f over $[a, b]$ te pas. Wegens $[a, b] \ni a_n \rightarrow c$ zal $f(a_n) \rightarrow f(c)$ en, omdat $f(a_n) < 0$ voor alle n is, zal $f(c) \leq 0$. Evenzo volgt uit $[a, b] \ni b_n \rightarrow c$ dat $f(b_n) \rightarrow f(c)$ en, omdat $f(b_n) > 0$ voor alle n is, zal $f(c) \geq 0$. Vandaar $f(c) = 0$. $\square$

4.2.6 Opmerking. De tussenwaardestelling drukt wiskundig de intuïtieve eigenschap uit dat men de grafiek van een continue functie kan tekenen ‘zonder de pen van het papier te heffen’.

4.2.7 Gevolg (Tussenwaardestelling²). *Zij f continu over het interval I (gelijk welk type). Elk getal dat ligt tussen twee verschillende functiewaarden van f/I is zelf een functiewaarde van f/I .*

Bewijs. Zij $f(a) < C < f(b)$, met $a \in I$, $b \in I$ en $a < b$. Omdat I een interval is hebben we wegens 1.2.27 dat $[a, b] \subseteq I$. De functie $g := f - C$ is dus continu over $[a, b]$, heeft $g(a) = f(a) - C < 0$ en $g(b) = f(b) - C > 0$. Bijgevolg bestaat er tussen a en b minstens één c met $g(c) = 0$, d.i. $f(c) = C$. Analoog voor het geval $f(a) > C > f(b)$. $\square$

4.2.8 Gevolg. *Is I een interval, en f is continu over I , dan is ook de waardenverzameling $f(I)$ een interval.*

Bewijs. Neem $y_1 \in f(I)$, $y_2 \in f(I)$ en $y_1 < y < y_2$. Door de tussenwaardestelling is ook y een waarde van f , m.a.w. $y \in f(I)$. Wegens 1.2.27 is $f(I)$ dus een interval. $\square$

4.2.9 Opmerking. Is f continu over het open interval I , dan is $f(I)$ wel een interval, maar niet noodzakelijk een open interval (geef zelf een voorbeeld).

Analoog met monotone rijen definieert men monotone functies.

²Ook genoemd: stelling van Bolzano. Van deze stelling vindt men al een zeer duidelijk idee, zowel theoretisch als praktisch, bij Simon Stevin (1594).

4.2.10 Definitie. Een functie f gedefinieerd op een interval I noemen wij **stijgend**³ als

$$(\forall x_1, x_2 \in I) (x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)).$$

Geldt de sterkere eigenschap

$$(\forall x_1, x_2 \in I) (x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2))$$

dan noemen wij de functie **strikt stijgend**.

Analoge definities gelden voor **dalend** en **strikt dalend**. Stijgende en dalende functies vormen samen de **monotone** functies.

Zoals voor rijen (Stelling 2.2.2) tonen we aan:

4.2.11 Stelling. *Als een functie f stijgend is en naar boven begrensd op een open interval I met b als eindpunt, dan bestaat $f(b-)$ en is $f(b-) = \sup_I f$.*

Bewijs. Omdat f naar boven begrensd is, bestaat $s := \sup_I f$. We gaan na dat $f(b-) = s$ en nemen daartoe een willekeurige positieve ε . Omdat $s = \sup_I f$ bestaat er een $x_0 \in I$ waarvoor $f(x_0) > s - \varepsilon$. Omdat f stijgend is volgt hieruit dat

$$f(x) > s - \varepsilon$$

voor elke $x \in I$, $x \geq x_0$. Aangezien voor zulke x ook $f(x) \leq s$, volgt er dat

$$s - \varepsilon < f(y) \leq s < s + \varepsilon \quad \text{zodra } b - \delta < x < b,$$

waarbij $\delta := b - x_0$. □

4.2.12 Opmerking. I.h.b. geldt er onder de voorwaarden van de vorige stelling dat $f(x) \leq f(b-)$ voor elke $x \in I$. Is f strikt stijgend in I , dan vinden we $f(x) < f(y) \leq f(b-)$ voor elke $x < y$ ($x, y \in I$), zodat zelfs $f(x) < f(b-)$ voor elke $x \in I$.

Analoog toont men aan:

4.2.13 Stelling. *Als een functie f stijgend is en naar onder begrensd op een open interval I met a als beginpunt, dan bestaat $f(a+)$ en is $f(a+) = \inf_I f$.*

4.2.14 Definitie. Als $f: A \rightarrow B$ een bijectie is, dan noemt men de afbeelding $g: B \rightarrow A$ de **inverse** van f als

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)(y = f(x) \iff x = g(y)). \quad (4.7)$$

Hierdoor is g uniek gedefinieerd, en is g ook een bijectie ('men verkrijgt g door in de pijlen-voorstelling van f de pijlen om te keren'). Men noteert deze afbeelding g als f^{-1} .

Uit de symmetrie in de definitie volgt dat f ook de inverse is van $g: B \rightarrow A$.

4.2.15 Opmerkingen.

1. De notatie f^{-1} kan ook een andere betekenis hebben, namelijk $1/f$. De context moet de dubbelzinnigheid opheffen.

³logischer zou zijn: 'niet-dalend'

2. Men kan de twee implicaties uit (4.7) ook gelijkwaardig uitdrukken d.m.v.

$$(\forall x \in A)(g(f(x)) = x) \quad \text{en} \quad (\forall y \in B)(f(g(y)) = y).$$

In feite volstaat het dat een van de twee implicaties (4.7) geldt, als men weet dat f een bijectie $A \rightarrow B$ is: dan bepaalt elk van de twee implicaties g al ondubbelzinnig.

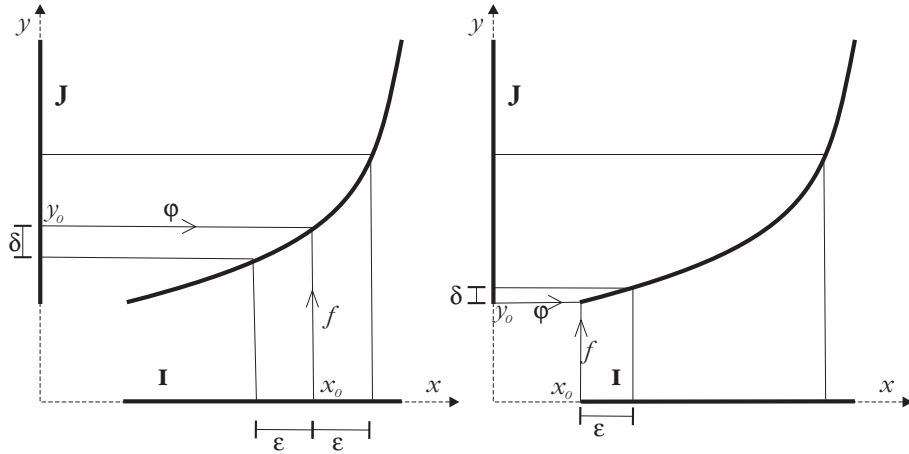
3. Als de eenheden op de beide coördinaatassen gelijk zijn, krijgt men de beeldlijn van de inverse functie door de beeldlijn van de oorspronkelijke functie om de eerste bissectrice te spiegelen.

4.2.16 Stelling (Inverse van een continue strikt monotone functie).

1. Zij f strikt stijgend en continu over een interval I (gelijk welk type). Dan heeft f een inverse φ die strikt stijgend en continu is over het interval $J := f(I)$.
2. Zij f strikt dalend en continu over een interval I (gelijk welk type). Dan heeft f een inverse φ die strikt dalend en continu is over het interval $J := f(I)$.

Bewijs. Beide bewijzen zijn analoog; we geven het eerste. Door 4.2.8 weten we dat de waardenverzameling $J = f(I)$ een interval is. Nu is f strikt stijgend en dus zeker injectief. Bijgevolg is elke $y \in J$ op juist één manier te schrijven als $y = f(x)$. De unieke $x \in I$ die bij een $y \in J$ hoort noteren we als $\varphi(y)$. Dit betekent dat $\varphi: J \rightarrow I$ de inverse is van f .

Om na te gaan dat φ strikt stijgend is, nemen we willekeurig $y_1 < y_2$ in J . Dan geldt $x_1 = \varphi(y_1) < \varphi(y_2) = x_2$, want $x_1 \geq x_2$ zou, wegens het stijgend karakter van f , leiden tot $y_2 = f(x_2) \leq f(x_1) = y_1$, in strijd met het gegeven dat $y_1 < y_2$.



Figuur 4.3: Continuïteit van φ/J in een inwendig punt (links) en in een beginpunt (rechts) van J .

Tot slot bewijzen we dat φ continu is over J . Neem willekeurig $y_0 \in J$. Als y_0 geen begin- of eindpunt van J is moeten we nagaan dat

$$\varphi(y_0) - \varepsilon < \varphi(y) < \varphi(y_0) + \varepsilon \quad \text{zodra} \quad y_0 - \delta_\varepsilon < y < y_0 + \delta_\varepsilon, y \in J.$$

Stel $x_0 = \varphi(y_0)$, zodat $f(x_0) = y_0$. Zij $\varepsilon > 0$ gegeven. Zonder de algemeenheid te schaden mogen we veronderstellen dat zowel $x_0 - \varepsilon$ als $x_0 + \varepsilon$ in I liggen. (Voor grotere ε geldt de

formule dan a fortiori.) Noem δ het kleinste van de twee positieve getallen $f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon)$ en $f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)$. Deze δ voldoet, want als $y \in J$ en $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$, dan volgt (wegens φ stijgend) $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$.

De continuïteit van φ/J in een eventueel begin- of eindpunt $y_0 \in J$ (dat kan enkel bij sommige gedaanten) volgt op analoge wijze. Is b.v. $y_0 \in J$ een beginpunt van J , dan is $y_0 = f(x_0)$ met $x_0 \in I$ een beginpunt van I . Het volstaat $\delta = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)$ te kiezen. $\square$

Nu volgen twee zeer belangrijke toepassingen van de stelling van Bolzano-Weierstrass op continue functies.

4.2.17 Stelling (Extremumstelling van Weierstrass⁴). *Als f continu is over het compact interval $I = [a, b]$, dan bereikt f/I minstens één keer haar kleinste waarde en minstens één keer haar grootste waarde, m.a.w. er bestaan x_1 en x_2 in I waarvoor*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall x \in I.$$

Bewijs. Het bewijs verloopt in twee stappen.

1. $f(I)$ is begrensd. Veronderstel dat dit niet zo is. Dan is de formule

$$(\exists K > 0)(\forall x \in I)(|f(x)| \leq K)$$

vals, dus de negatie ervan, nl.

$$(\forall K > 0)(\exists x \in I)(|f(x)| > K)$$

zou waar zijn. Passen we deze formule toe voor $K = 1$, dan vinden we een $x_1 \in I$ met $|f(x_1)| > 1$. Nemen we $K = 2$, dan vinden we een $x_2 \in I$ met $|f(x_2)| > 2$. Zo construeren we een rij $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ met $a \leq x_n \leq b$ en $|f(x_n)| > n$ voor alle n . Wegens de stelling van de convergente deelrij bestaat $x_{n_k} \rightarrow \gamma \in I$. Doordat f/I bij veronderstelling continu is in het punt γ , zal $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\gamma)$. In het bijzonder zou de rij $f(x_{n_1}), f(x_{n_2}), f(x_{n_3}), \dots$ begrensd zijn, wat strijdig is met $|f(x_{n_1})| > n_1 \geq 1$, $|f(x_{n_2})| > n_2 \geq 2$, $|f(x_{n_3})| > n_3 \geq 3, \dots$

2. $f(I)$ heeft een grootste element. Door deel 1. weten we al dat f naar boven begrensd is. Stel $M = \sup_{x \in I} f(x)$. We tonen aan dat $M = \max f(I)$, m.a.w. dat $M \in f(I)$. Bij definitie van supremum bestaan $x_n \in I$ met de eigenschap dat $M - 1/n \leq f(x_n) \leq M$ voor elke $n \in \mathbb{N}^+$. Wegens de stelling van de convergente deelrij bestaat $x_{n_k} \rightarrow \gamma \in I$, waarvoor opnieuw $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\gamma)$. Maar door de sandwich-regel is ook $f(x_{n_k}) \rightarrow M$, zodat $f(\gamma) = M$. Het bewijs dat f haar ondergrens bereikt, verloopt analoog. $\square$

4.2.18 Opmerkingen.

1. Deze stelling komt hierop neer: *Is f continu over een compact interval, dan is het beeldinterval eveneens compact.* De stelling toont immers aan dat het beeldinterval een grootste en een kleinste element heeft.
2. Voor andere types intervallen geldt de stelling niet (geef tegenvoorbeelden!).

⁴Bolzano, 1817

De tweede belangrijke toepassing van de stelling van de convergente deelrij heeft betrekking op het begrip *gelijkmatige continuïteit*. De zegswijze ‘ f is continu over A ’ betekent dat

$$(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_{x,\varepsilon} > 0)(\forall x' \in A)(|x - x'| < \delta_{x,\varepsilon} \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon).$$

Hierbij kan δ , zoals uit de notatie $\delta_{x,\varepsilon}$ blijkt, voor elke x anders zijn. Men kan deze definitie verstrengen door te eisen dat er, bij een gegeven ε , een $\delta > 0$ moet bestaan *die dezelfde is voor alle x in A* . Dit leidt tot de formule

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)(\forall x, x' \in A)(|x' - x| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon), \quad (4.8)$$

korter en veel sprekender genoteerd als

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon \quad \text{zodra } |x - x'| < \delta_\varepsilon.$$

De notatie δ_ε weerspiegelt het feit dat deze δ wel van ε afhangt, maar niet van x in A .

4.2.19 Definitie. Als (4.8) geldt, zegt men dat f over A **gelijkmatig (of: uniform) continu** is.

Duidelijk is een gelijkmatig continue functie ook ‘gewoon’ (men zegt soms, bij wijze van contrast: **puntsgewijs**) continu. Zoals zal blijken, is het omgekeerde niet waar: er bestaan veel functies die over een gegeven verzameling wel puntsgewijs continu zijn, maar niet gelijkmatig. Het is van groot belang dat over *compacte* intervallen ‘puntsgewijze’ en ‘gelijkmatige’ continuïteit gelijkwaardig zijn.

4.2.20 Stelling (Heine, 1870). *Is f continu over het compact interval $I = [a, b]$, dan is f over I automatisch gelijkmatig continu.*

Bewijs. We gaan te werk uit het ongerijmde, en veronderstellen dus dat de formule (4.8) vals is. Dan zou de negatie ervan, nl.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta_\varepsilon > 0)(\exists x \in I)(\exists x' \in I)(|x' - x| < \delta_\varepsilon \quad \& \quad |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon)$$

waar zijn. Kies zo’n uitzonderlijke ε , stel ε_0 . Nemen we achtereenvolgens $\delta = 1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$ dan vinden we in I punten $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots, x_n, x'_n, \dots$ waarvoor

$$\begin{aligned} |x_1 - x'_1| < 1 & \quad \text{en} \quad |f(x_1) - f(x'_1)| \geq \varepsilon_0, \\ |x_2 - x'_2| < 1/2 & \quad \text{en} \quad |f(x_2) - f(x'_2)| \geq \varepsilon_0, \\ & \vdots \\ |x_n - x'_n| < 1/n & \quad \text{en} \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0, \\ & \text{enzovoort.} \end{aligned}$$

Wegens de stelling van de convergente deelrij bestaat $x_{n_k} \rightarrow \gamma \in I$, hetgeen inhoudt dat

$$|\gamma - x_{n_k}| < \varepsilon/2 \quad \text{zodra } k > N_\varepsilon.$$

De deelrij (x'_{n_k}) convergeert dan automatisch eveneens naar γ , want

$$\begin{aligned} |x'_{n_k} - \gamma| &\leq |x_{n_k} - x'_{n_k}| + |x_{n_k} - \gamma| \\ &< (1/n_k) + (\varepsilon/2) \quad \text{zodra } k > N_\varepsilon \\ &< \varepsilon \quad \text{zodra } k > N'_\varepsilon. \end{aligned}$$

Nu is f continu over $I \ni \gamma$, zodat $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\gamma)$ en $f(x'_{n_k}) \rightarrow f(\gamma)$, en bijgevolg $f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k}) \rightarrow 0$. Er zou dus gelden dat

$$|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| < \varepsilon_0 \quad \text{zodra } k > N_0,$$

wat strijdig is met

$$|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0 \quad \text{voor alle } n.$$

□

4.2.21 Voorbeeld. De functie $1/x$ is over $]0, 1]$ continu, maar niet gelijkmatig continu.

Uit de gelijkmatige continuïteit zou immers volgen dat $0 < \delta < 1$ bestaat met de eigenschap dat

$$(\forall x, y \in]0, 1]) (|x - y| < \delta \implies |1/x - 1/y| < 1)$$

en dus i.h.b. voor de keuze $y := \delta$ dat

$$(\forall x \in]0, \delta]) (|1/x - 1/\delta| < 1),$$

zodat de functie $1/x$ begrensd zou zijn op $]0, \delta[$, wat niet het geval is.

4.2.22 Voorbeeld. De functie $\cos(x^2)$ is over $\mathbb{R}$ continu, maar niet gelijkmatig continu.

Bij definitie is $\cos(x^2)$ niet gelijkmatig continu als en slechts als

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x, x' \in \mathbb{R})(|x - x'| < \delta \ \& \ |\cos(x^2) - \cos(x'^2)| \geq \varepsilon).$$

Dit is vervuld voor $\varepsilon = 1$, want voor $n \in \mathbb{N}$ en $x = \sqrt{n\pi}$, $x' = \sqrt{(n+1)\pi}$ is $|\cos(x^2) - \cos(x'^2)| = 2$, maar $|x - x'| = \sqrt{\pi}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \delta$ als n voldoende groot is.

4.2.23 Opmerking. Hoewel het onderscheid tussen puntsgewijze en gelijkmatige continuïteit subtiel is, zullen we in het vervolg enkele malen cruciaal steunen op de gelijkmatige continuïteit (6.2.11, 11.2.7).

4.2.24 Quiz. Waar of niet waar?

1. De afbeelding $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = x^2$ is monotoon.
2. De afbeelding $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]: f(x) = x^2$ is monotoon.
3. Als een afbeelding $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unitnoc is in elk punt $x \in \mathbb{R}$, dan is f continu op heel $\mathbb{R}$.
4. Als een afbeelding $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu is op heel $\mathbb{R}$, dan is f unitnoc in elk punt $x \in \mathbb{R}$.

Hierbij is een afbeelding $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *unitnoc* in x als

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in \mathbb{R})(|y - x| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

4.3 Oefeningen

Onderzoek continuïteit van de volgende functies:

$$(1) f(x) = |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(2) f(x) = x|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(3) f(x) = \ln |x|, \quad x \neq 0$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$

$$(5) g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$

$$(6) h(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$

$$(7) f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$(8) f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Je mag hierbij aannemen dat de afbeeldingen $\ln: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu zijn op heel hun domein (zie Hoofdstuk 7).

Hoofdstuk 5

Afleidbaarheid

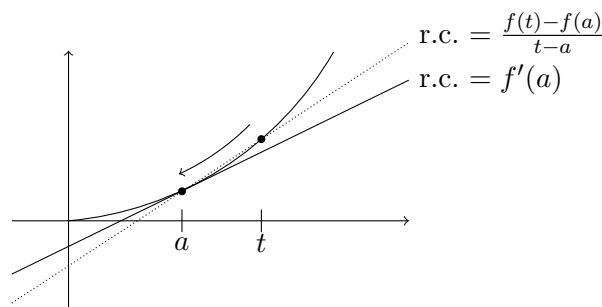
5.1 Afgeleiden van eerste orde

5.1.1 Algemene eigenschappen

5.1.1 Definitie. Zij f een functie $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, en a een inwendig punt van $\mathcal{D}_f$, zodat $f(a+h)$ bestaat als $|h|$ klein genoeg is. Men noemt f **afleidbaar** in a als

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \left(= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \quad (5.1)$$

bestaat. In dat geval noemt men de waarde van deze limiet de **afgeleide** van f in a ; wij noteren haar als $f'(a)$.



Figuur 5.1: Meetkundige betekenis van de afgeleide

Meetkundig gezien is $\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ de richtingscoëfficiënt van de rechte door de punten $(a, f(a))$ en $(t, f(t))$, beide gelegen op de grafiek van f . De afgeleide $f'(a)$ geeft meetkundig gezien de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek in het punt $(a, f(a))$ (als deze raaklijn bestaat).

Een van de vele fysische interpretaties is als volgt: als $f(t)$ de plaats van een voorwerp geeft (langs de Y-as) als functie van de tijd t , dan geeft $\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ de gemiddelde snelheid in het tijdsinterval $[a, t]$. In de limiet $t \rightarrow a$ vinden we de (zgn. ogenblikkelijke) snelheid van het voorwerp op tijdstip a .

5.1.2 Stelling. *f is afleidbaar in a juist als er een reëel getal α en een functie r bestaan waarvoor we kunnen schrijven*

$$f(a+h) = f(a) + \alpha h + hr(h) \quad \text{met } r(h) \rightarrow 0 \text{ als } h \rightarrow 0. \quad (5.2)$$

Bewijs. Uit (5.2) volgt dat, voor $h \neq 0$ en voldoende klein,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \alpha + r(h),$$

waaruit (5.1) bestaat ($= \alpha$). Omgekeerd, veronderstel dat (5.1) bestaat, en noem dit getal α . Voor $h \neq 0$ en voldoende klein kunnen we dan definiëren

$$r(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \alpha.$$

Blijkbaar geldt dan de ontbinding (5.2), met $r(h) \rightarrow 0$ voor $h \rightarrow 0$. □

5.1.3 Opmerking. Men kan (5.2) zien als een manier om de limiet (5.1) zonder noemers uit te drukken. Ook zal (5.2) zich gemakkelijker laten veralgemenen in meerdere veranderlijken (zie Wiskundige Analyse II).

5.1.4 Definitie. De **afgeleide (functie)** van f , genoteerd f' , is de functie met $f'(x)$ als waarde in die punten x waar f afleidbaar is.

Het domein van f' is uiteraard een deelverzameling (eventueel leeg) van het domein van f .

5.1.5 Opmerkingen.

1. Overeenkomstig de traditie om een concrete functie f te noteren als $f(x)$, noteert men haar afgeleide functie f' ook als $(f(x))'$. Zo schrijven we kortweg $(x^n)' = nx^{n-1}$ ($n \geq 1$) met de betekenis: stellen we $f(x) := x^n, \forall x \in \mathbb{R}$, dan is $f'(x) = nx^{n-1}, \forall x \in \mathbb{R}$.
2. Behalve f' zijn ook nog de notaties Df en $\frac{df}{dx}$ gebruikelijk, waarbij in de laatste notatie¹ de noemer verwijst naar de naam van de onafhankelijk veranderlijke, die men uit de context moet halen. Voor $f'(a)$ schrijft men dan $Df(a)$ resp. $\frac{dy}{dx}\Big|_a$ of $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$.

We leiden nu enkele eigenschappen af uit het bestaan en uit het teken van de afgeleide in een punt.

5.1.6 Stelling. *Is f , met domein $\mathcal{D}$, afleidbaar in a , dan gelden de volgende eigenschappen:*

1. *f is continu in a*
2. **eigenschap van positieve afgeleide**²: *is $f'(a) > 0$, dan bestaat er een $\delta > 0$ met de eigenschap: voor alle $a < x < a + \delta$ is $f(x) > f(a)$ en voor alle $a - \delta < x < a$ is $f(x) < f(a)$*

¹Het symbolisch quotiënt $\frac{dy}{dx}$ moet men als één geheel zien. Het werken met dx en dy afzonderlijk leidt zeer snel tot contradicties.

²In woorden uitgedrukt: ‘onmiddellijk’ rechts van a zijn de functiewaarden groter dan in a , ‘onmiddellijk’ links kleiner.

3. **eigenschap van negatieve afgeleide**³: is $f'(a) < 0$, dan bestaat er een $\delta > 0$ met de eigenschap: voor alle $a < x < a + \delta$ is $f(x) < f(a)$ en voor alle $a - \delta < x < a$ is $f(x) > f(a)$.

Bewijs. 1. Uit (5.2) halen we dat $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$, d.w.z. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

2. Veronderstel dat

$$f'(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \left(= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) > 0.$$

Dan is (behoud van teken) $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ in een doorpriekte omgeving van a , stel voor $a \neq x \in]a - \delta, a + \delta[$. Als dus $a < x < a + \delta$, dan is $f(x) - f(a) > 0$; is $a - \delta < x < a$, dan is $f(x) - f(a) < 0$. Analoog voor 3. $\square$

Nu enkele veelgebruikte rekenregels.

5.1.7 Stelling. Beschouw twee functies f en $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, beide afleidbaar in a . Dan hebben we:

1. $f + g$ is afleidbaar in a , en $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2. $f - g$ is afleidbaar in a , en $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$
3. fg is afleidbaar in a , en $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
4. als $g(a) \neq 0$ dan is f/g afleidbaar in a , en $(f/g)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

Bewijs. 1. Voor $|h|$ klein genoeg hebben we

$$\frac{(f(a+h) + g(a+h)) - (f(a) + g(a))}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h},$$

waaruit na limietovergang $h \rightarrow 0$ het te bewijzen. Analoog voor 2.

3.

$$\frac{(f(a+h)g(a+h)) - (f(a)g(a))}{h} = g(a)\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + f(a+h)\frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$

Voor $h \rightarrow 0$ nadert de eerste term van het rechterlid tot $g(a)f'(a)$ en de tweede tot $f(a)g'(a)$, waarbij we de continuïteit van f in a gebruiken in de vorm $f(a+h) \rightarrow f(a)$.

4. We behandelen vooraf het speciaal geval waarbij $f(x) = 1$ voor alle x , m.a.w. we zoeken de afgeleide van $1/g$ in een punt a waar $g(a) \neq 0$. Wegens $g(a) \neq 0$ en de continuïteit van g in a is (behoud van teken) $g(a+h) \neq 0$ als $|h|$ voldoende klein is. Voor $|h|$ voldoende klein kunnen we dus schrijven

$$\frac{\frac{1}{g}(a+h) - \frac{1}{g}(a)}{h} = - \left(\frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right) \cdot \left(\frac{1}{g(a)} \right) \cdot \left(\frac{1}{g(a+h)} \right).$$

³In woorden uitgedrukt: ‘onmiddellijk’ rechts van a zijn de functiewaarden kleiner dan in a , ‘onmiddellijk’ links groter.

Voor $h \rightarrow 0$ nadert de eerste factor in het rechterlid tot $g'(a)$ en de derde tot $\frac{1}{g(a)}$ (continuïteit van g in a). Vandaar

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

De algemene formule 4. volgt uit

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \left(\frac{1}{g}\right) + f \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - f \frac{g'}{g^2}.$$

□

5.1.8 Definitie. Een functie noemt men **afleidbaar over/in** een open interval (d.w.z., van de vorm $]a, b[$, $] -\infty, a[$, $]a, +\infty[$ of $\mathbb{R}$) als f in elk punt van dit interval afleidbaar is.

5.1.9 Stelling (Kettingregel). Beschouw twee functies f en $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, met samengestelde

$$F(x) = g(f(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_F).$$

Als f afleidbaar is in a en g afleidbaar in $f(a)$, dan is F eveneens afleidbaar in a , en

$$F'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Bewijs. 1. Vooreerst gaan we na dat a een inwendig punt van $\mathcal{D}_F$ is. Omdat g afleidbaar in $f(a)$ is, is $f(a)$ een inwendig punt van $\mathcal{D}_g$. Er bestaat dus een $\varepsilon > 0$ met $]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[\subseteq \mathcal{D}_g$. Omdat f continu (zelfs afleidbaar) in a is, bestaat er een $\delta > 0$ met de eigenschap dat voor elke $x \in]a - \delta, a + \delta[\cap \mathcal{D}_f$ geldt dat $f(x) \in]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$. We kunnen δ zo klein kiezen (desnoods door te verkleinen) dat $]a - \delta, a + \delta[\subseteq \mathcal{D}_f$, want, doordat f afleidbaar in a is, is a een inwendig punt van $\mathcal{D}_f$. We besluiten dan dat voor alle $x \in]a - \delta, a + \delta[$ geldt dat $f(x) \in \mathcal{D}_g$, m.a.w. $x \in \mathcal{D}_F$. Vandaar $]a - \delta, a + \delta[\subseteq \mathcal{D}_F$.

2. Als $f(x) \neq f(a)$ in een doorprikte omgeving van a , dan is

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} g'(f(a)) \cdot f'(a) \quad (5.3)$$

(we maken hier gebruik van $f(x) \rightarrow f(a)$ als $x \rightarrow a$ wegens 5.1.6.1).

3. Blijft het geval waarbij $f(x_n) = f(a)$ zich voordoet voor zekere $a \neq x_n \in]a - 1/n, a + 1/n[$ voor elke $n \geq 1$. Dan is $x_n \rightarrow a$. Omdat $f'(a)$ bestaat, is dan $f'(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = 0$ (rijkenmerk). Wegens (5.3) en $g'(f(a))f'(a) = 0$ is nu

$$\left| \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \right| \leq \varepsilon$$

zodra $0 < |x - a| \leq \delta_\varepsilon$ en $f(x) \neq f(a)$. Maar als $f(x) = f(a)$ geldt deze ongelijkheid triviaal. We besluiten dat ook in dit geval $F'(a) = 0 = g'(f(a))f'(a)$. □

5.1.10 Opmerkingen.

1. Overeenkomstig de traditie om een concrete functie f te noteren als $f(x)$, noteert men vaak $(g(f(x)))'$ i.p.v. $(g \circ f)'(x)$. Verwar $(g(f(x)))'$ niet met $g'(f(x))$. Het eerste is de afgeleide van de samengestelde functie $g \circ f$ in x (dus $g'(f(x))f'(x)$ wegens de kettingregel), het tweede is de afgeleide van g in het punt $f(x)$!

2. Voor samenstellingen van meer dan twee functies past men de kettingregel een aantal keren na elkaar toe. Zo is

$$(h(g(f(x))))' = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

5.1.11 Stelling (Afleidbaarheid van inverse). *Zij f continu en strikt stijgend of strikt dalend over het interval I (gelijk welk type), en veronderstel dat f afleidbaar is in een bepaald punt c van I , met $f'(c) \neq 0$. Dan is de inverse φ van f afleidbaar in $f(c)$, en*

$$\varphi'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}.$$

Bewijs. We willen aantonen dat

$$\lim_{y \rightarrow f(c)} \frac{\varphi(y) - c}{y - f(c)}$$

bestaat en gelijk is aan $\frac{1}{f'(c)}$. Nu is

$$\lim_{y \rightarrow f(c)} \frac{y - f(c)}{\varphi(y) - c} = \lim_{y \rightarrow f(c)} \frac{f(\varphi(y)) - f(c)}{\varphi(y) - c} = f'(c).$$

Inderdaad, als $y \rightarrow f(c)$, dan is (wegens de continuïteit van φ in $f(c)$) ook $\varphi(y) \rightarrow \varphi(f(c)) = c$, zodat de laatste gelijkheid volgt door de definitie van $f'(c)$.

Omdat $f'(c) \neq 0$, volgt het gevraagde dan door de rekenregels van limieten. $\square$

5.1.2 Middelwaardestelling en toepassingen

5.1.12 Definitie. Men zegt dat een functie f , met domein $\mathcal{D}$, in een punt $a \in \mathcal{D}$ (hoeft geen inwendig punt te zijn) een **(lokaal) maximum** bereikt als er een omgeving $V :=]a - R, a + R[$ van a bestaat ($R > 0$) met de eigenschap dat

$$(\forall x \in V \cap \mathcal{D})(f(x) \leq f(a)). \quad (5.4)$$

Analoog voor een **(lokaal) minimum**. Een **(lokaal) extremum** is hetzij een lokaal maximum hetzij een lokaal minimum.

5.1.13 Opmerkingen.

1. Als f een extremum bezit in a , dan is $f(a)$ (en niet a) het z.g. *extremum* (= extreme waarde).
2. De grootste en kleinste waarden opgeleverd door de extremumstelling van Weierstrass zijn *globale* extrema, met (voor een maximum) i.p.v. (5.4) het sterkere

$$(\forall x \in [a, b])(f(x) \leq f(a)).$$

5.1.14 Stelling (Nodige voorwaarde voor extremum). *Bereikt f in a een lokaal extremum, en is f in a afleidbaar,⁴ dan is $f'(a) = 0$.*

⁴wat o.a. inhoudt dat a een inwendig punt is van $\mathcal{D}_f$

Bewijs. Veronderstel dat f in a een lokaal maximum bereikt; het bewijs voor een minimum verloopt analoog. Het kan niet dat $f'(a) > 0$, want dan heeft f wegens 5.1.6.2 ‘onmiddellijk’ rechts van a grotere waarden dan in a . Evenmin kan het dat $f'(a) < 0$, want dan heeft f wegens 5.1.6.3 ‘onmiddellijk’ links van a grotere waarden dan in a . Bijgevolg is $f'(a) = 0$. $\square$

5.1.15 Stelling (Middelwaardestelling⁵). *Als $a < b$ en*

1. f is afleidbaar over $]a, b[$

2. f is continu over $[a, b]$

dan bestaat er minstens één $c \in]a, b[$ waarvoor

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

Bewijs. I. *Bijzonder geval:* $f(a) = f(b)$. In dat geval moeten we bewijzen dat $f'(c) = 0$ voor minstens één $a < c < b$. (Deze eigenschap staat bekend als de **Stelling van Rolle**.)

Zij $f(a) = f(b) =: C$. Door de extremumstelling van Weierstrass bereikt f over $[a, b]$ haar grootste waarde in een zeker punt $c \in [a, b]$. Als deze $c \in]a, b[$, dan leert 5.1.14 dat $f'(c) = 0$. In het andere geval is $c = a$ of $c = b$, zodat de grootste waarde van f gelijk is aan C .

Analoog bereikt f haar kleinste waarde in een zeker punt $c \in [a, b]$. Als deze $c \in]a, b[$, dan volgt opnieuw $f'(c) = 0$. In het andere geval is de kleinste waarde van f gelijk aan C .

In het overblijvend geval is dus C zowel de grootste als de kleinste waarde van f op $[a, b]$, zodat f constant is op heel $[a, b]$, en dus $f'(c) = 0$ voor elke c uit $]a, b[$.

II. *Algemeen geval.* We herleiden het probleem tot geval I door $F(x) := f(x) - \alpha x$ te definiëren, waarbij we $\alpha \in \mathbb{R}$ zo trachten te kiezen dat $F(a) = F(b)$. Uit

$$F(a) = f(a) - \alpha a = f(b) - \alpha b = F(b)$$

volgt dat $\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ de enige keuze is die hieraan voldoet. Deze F is ook afleidbaar over $]a, b[$ en continu over $[a, b]$, zodat een $a < c < b$ bestaat waarvoor

$$F'(c) = f'(c) - \alpha = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

$\square$

5.1.16 Opmerking. We zullen de middelwaardestelling ook in de volgende vorm toepassen: *als f afleidbaar is over $]a, b[$ en $f(a+)$ en $f(b-)$ bestaan, dan bestaat er minstens één $c \in]a, b[$ waarvoor $f(b-) - f(a+) = (b - a)f'(c)$.*

Het volstaat immers om $g(x) := f(x)$ te definiëren voor elke $x \in]a, b[$, $g(a) := f(a+)$ en $g(b) := f(b-)$ en vast te stellen dat g aan de opgave van de middelwaardestelling voldoet, en dat $f'(x) = g'(x)$ voor elke $x \in]a, b[$.

We onderzoeken nu m.b.v. de middelwaardestelling het stijgen en dalen van functies.

5.1.17 Stelling (Stijgen en dalen). *Zij f afleidbaar in het open interval I . Dan hebben we:*

⁵De stelling dankt haar naam aan het feit dat $(f(b) - f(a))/(b - a)$ de gemiddelde waarde is van f' op $[a, b]$.

1. f is stijgend in I juist als $(\forall x \in I)(f'(x) \geq 0)$.
2. f is dalend in I juist als $(\forall x \in I)(f'(x) \leq 0)$.
3. f is constant in I juist als $(\forall x \in I)(f'(x) = 0)$.
4. Als voor elke $x \in I$ geldt dat $f'(x) > 0$, dan is f strikt stijgend in I .

Bewijs. 1. Is f stijgend in I , dan geldt voor alle $x < x+h$ in I dat $f(x) \leq f(x+h)$. Vandaar

$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Omgekeerd leert de middelwaardstelling nu dat voor alle $x_1 < x_2$ in I

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) \geq 0 \quad (x_1 < c < x_2)$$

zodat $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. De functie is bijgevolg stijgend in I .

2. Analoog.

3. Combineer delen 1. en 2.

4. Analoog als voor de ‘omgekeerde’ implicatie van deel 1. □

5.1.18 Opmerking. De implicatie in deel 4. kan niet omgekeerd worden, zoals men ziet aan het voorbeeld van de functie $f(x) = x^3$ over $I :=]-1, 1[$. Deze functie is strikt stijgend in I , en toch is $f'(0) = 0$.

We stellen nu een regel op die de meeste onbepaaldheden bij limieten oplost. We beginnen met de onbepaaldheid

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$$

Als $f'(a)$ en $g'(a)$ bestaan, en als $g'(a) \neq 0$, dan kunnen we de limiet berekenen, want onder deze voorwaarden zijn f en g continu in a , zodat $f(a) = g(a) = 0$ en

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Omdat deze voorwaarde voor de praktijk te streng is,⁶ tonen we een verfijning van dit resultaat aan.

5.1.19 Toepassing (Regel van de l'Hospital⁷ voor rechterlimiet $\frac{0}{0}$). *Veronderstel dat*

1. f' en g' bestaan in een open interval $]a, a+R[$ ($R > 0$)
2. $f(a+) = g(a+) = 0$
3. $g'(x) \neq 0$ op $]a, a+R[$

⁶in de praktijk gebeurt het b.v. dikwijls dat $g'(a) = 0$

⁷auteur van het eerste leerboek van Analyse, nl. *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* van 1696. Het wiskundewerk erin was van Johann Bernoulli.

4. $g'(x)$ heeft een vast teken op $]a, a + R[$.

Dan hebben we:

$$\boxed{\text{Als } \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}, \text{ dan ook } \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.} \quad (5.5)$$

Bewijs. Zij $g'(x) > 0$ op $]a, a + R[$. (Het geval $g'(x) < 0$ verloopt analoog.) Kies willekeurig $\varepsilon > 0$. De veronderstelling van (5.5) betekent dat er bij deze $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat met

$$A - \varepsilon \leq \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq A + \varepsilon \quad \text{als } a < x < a + \delta < a + R.$$

Bijgevolg is

$$(A + \varepsilon)g'(x) - f'(x) \geq 0 \quad \text{en} \quad f'(x) - (A - \varepsilon)g'(x) \geq 0 \quad \text{als } a < x < a + \delta.$$

De functies $(A + \varepsilon)g(x) - f(x)$ en $f(x) - (A - \varepsilon)g(x)$ zijn dus stijgend in $]a, a + \delta[$. Voor elke $x \in]a, a + \delta[$ is dan (wegens 4.2.12)

$$(A + \varepsilon)g(x) - f(x) \geq (A + \varepsilon)g(a+) - f(a+) = 0 \quad \text{en} \quad f(x) - (A - \varepsilon)g(x) \geq f(a+) - (A - \varepsilon)g(a+) = 0.$$

Hieruit volgt dat $(A + \varepsilon)g(x) \geq (A - \varepsilon)g(x)$, en dus dat $g(x) \geq 0$. Daardoor is

$$A - \varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq A + \varepsilon.$$

Vermits onze x willekeurig in $]a, a + \delta[$ gekozen was, gelden deze ongelijkheden voor alle $a < x < a + \delta$, en dat is de definitie van

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

□

5.1.20 Opmerkingen.

1. Men kan aantonen dat de voorwaarde 4. gelijkwaardig is met de zwakkere voorwaarde dat $g'(x) \neq 0$ op $]a, a + R[$.⁸ Daarmee zijn de voorwaarden uit de opgave niets meer dan een opsomming van alles wat men nodig heeft om de formule (5.5) te kunnen opschrijven.
2. De voorwaarde 3. mag eigenlijk weggelaten worden, want ze is vervuld zodra 4. dat is. Immers, veronderstel eens dat $g(x_0) = 0$ voor een $a < x_0 < a + R$. Dan is $g(x_0-) = g(a+) = 0$, zodat uit de stelling van Rolle zou volgen dat $g'(x_1) = 0$ voor een x_1 tussen x_0 en a . Dit nu is uitgesloten door het gegeven 4.

Een analoge regel bestaat natuurlijk voor linkerlimieten. De combinatie van beide regels geeft

5.1.21 Gevolg (Regel van de l'Hospital voor limiet $\frac{0}{0}$). Veronderstel dat

1. f' en g' bestaan over $]a - R, a + R[\setminus \{a\}$ ($R > 0$)

⁸Dit volgt uit een stelling van Darboux die zegt dat een afgeleide van een functie altijd aan de tussenwaardestelling voldoet. Als g' continu is (wat in de praktijk meestal zo is), dan weten we dit wegens 4.2.5.

2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$
3. $g(x) \neq 0$ op $]a - R, a + R[\setminus \{a\}$
4. $g'(x) \neq 0$ op $]a - R, a + R[\setminus \{a\}$.

Dan hebben we:

$$\text{Als } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}, \text{ dan ook } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

5.1.22 Opmerking. De voorwaarde 3. mag weggelaten worden.

Een analoge regel bestaat ook voor $x \rightarrow \pm\infty$. Het bewijs verloopt analoog.

We bekijken nu de onbepaaldheid $\frac{\infty}{\infty}$. Om te illustreren dat de formulering en de bewijzen voor $x \rightarrow \pm\infty$ analoog zijn aan die voor $x \rightarrow a \pm$, tonen we nu eens het geval $x \rightarrow +\infty$ aan (voor de andere gevallen geldt de regel ook, met een analoog bewijs). We bekijken dus de onbepaaldheid

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$$

5.1.23 Toepassing (Regel van de l'Hospital voor limiet $\frac{\infty}{\infty}$). Veronderstel dat

1. f' en g' bestaan in een open interval $]a, +\infty[$ met $a \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \pm\infty$
3. $g(x) \neq 0$ op $]a, +\infty[$
4. $g'(x)$ heeft een vast teken op $]a, +\infty[$.

Dan hebben we:

$$\text{Als } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}, \text{ dan ook } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A. \quad (5.6)$$

Bewijs. We geven het bewijs voor het geval $g(x) \rightarrow +\infty$ en $g'(x) > 0$. (De andere gevallen verlopen analoog.) Kies willekeurig $\varepsilon > 0$. De veronderstelling in (5.6) betekent dat

$$A - \varepsilon \leq \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq A + \varepsilon \quad \text{als } x \geq x_0 > a.$$

Zoals voorheen volgt dat de functies $(A + \varepsilon)g(x) - f(x)$ en $f(x) - (A - \varepsilon)g(x)$ stijgend zijn in $[x_0, +\infty[$. Voor elke $x > x_0$ is dan

$$(A + \varepsilon)g(x) - f(x) \geq (A + \varepsilon)g(x_0) - f(x_0) \quad \text{en} \quad f(x) - (A - \varepsilon)g(x) \geq f(x_0) - (A - \varepsilon)g(x_0)$$

Wegens $g(x) \rightarrow +\infty$ als $x \rightarrow +\infty$ is $g(x) > g(x_0)$ en $g(x) > 0$ zodra x groot genoeg is. Bijgevolg

$$A - \varepsilon + \frac{f(x_0) - (A - \varepsilon)g(x_0)}{g(x)} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq A + \varepsilon + \frac{f(x_0) - (A + \varepsilon)g(x_0)}{g(x)}$$

voor x groot genoeg. Wegens $g(x) \rightarrow +\infty$ is

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0) - (A - \varepsilon)g(x_0)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0) - (A + \varepsilon)g(x_0)}{g(x)} = 0$$

dus

$$\frac{f(x_0) - (A - \varepsilon)g(x_0)}{g(x)} \geq -\varepsilon \quad \text{en} \quad \frac{f(x_0) - (A + \varepsilon)g(x_0)}{g(x)} \leq \varepsilon$$

als x groot genoeg is. Vandaar

$$A - 2\varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq A + 2\varepsilon \quad \text{zodra } x \text{ groot genoeg is.}$$

Dat is de definitie van

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

□

5.1.24 Opmerking. De voorwaarde 3. mag weggelaten worden, want ze is vervuld voor voldoende grote a zodra 2. dat is (door de waarde van a desnoods te vergroten—hetgeen de eisen op f en g verzwakt—blijft de regel—die immers niet van a afhangt—geldig). Voorwaarde 4. is opnieuw gelijkwaardig met de voorwaarde dat $g'(x) \neq 0$ voor $x > a$.

5.1.3 Functies van klasse C^1

Uit voorbeelden blijkt dat een afgeleide functie f' niet noodzakelijk continu is.⁹

5.1.25 Definitie. We noemen f **van klasse C^1** of **glad**¹⁰ of **continu afleidbaar** over een open interval $]a, b[\subseteq \mathcal{D}_f$ als f' bestaat en continu is in elk punt van $]a, b[$.

5.1.26 Definitie. We noemen f **van klasse C^1** of **glad** of **continu afleidbaar** over een *compact* interval $[a, b] \subseteq \mathcal{D}_f$ als f de drie volgende eigenschappen heeft:

1. f is continu over $[a, b]$
2. f' bestaat en is continu over $]a, b[$
3. f' heeft een rechterlimiet in a en een linkerlimiet in b .

5.1.27 Stelling. Een functie f is glad over $[a, b]$ juist als f kan uitgebreid worden tot een functie F die glad is over een open interval dat $[a, b]$ omvat, m.a.w. als er een functie F en een open interval $] \alpha, \beta [$ bestaan waarvoor geldt

1. $[a, b] \subset] \alpha, \beta [$
2. F is van klasse C^1 over $] \alpha, \beta [$ (dus: F' bestaat en is continu in elk punt van $] \alpha, \beta [$)
3. $F/[a, b] = f/[a, b]$.

⁹Vb.: $x^2 \sin \frac{1}{x}$ (zie de oefeningen). Verwar dit niet met het feit dat een afleidbare f automatisch continu is.

¹⁰Engels: *smooth*

Bewijs. Zij f glad over $[a, b]$. Definieren we $F(x) = f(a) + f'(a+)(x - a)$ voor $x < a$ en $F(x) = f(b) + f'(b-)(x - b)$ voor $x > b$, dan is F een uitbreiding van f die glad is over $\mathbb{R}$, want

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \left(= \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x) = f'(a+) = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}$$

zodat $F'(a) = f'(a+)$. Analoog is $F'(b) = f'(b-)$.

Omgekeerd, als er een dergelijke uitbreiding F bestaat, dan is f glad over $[a, b]$. (Ga na bij wijze van oefening. In het bijzonder is $f'(a+) = F'(a)$ en $f'(b-) = F'(b)$.) $\square$

5.1.28 Notatie. De verzameling van alle functies die glad zijn over het interval J (open of gesloten) noteren we als $C^1(J)$.

5.2 Afgeleiden van hogere orde

De afgeleide f' van f kan op haar beurt een afgeleide hebben, die men de afgeleide van **tweede orde** van f noemt, enz. De definitieverzameling van elke nieuwe afgeleide is een deelverzameling (eventueel leeg) van de definitieverzameling van de vorige afgeleide.

5.2.1 Definitie. De afgeleide van nulde orde van f is f zelf.

5.2.2 Notatie. Voor de opeenvolgende afgeleiden van f zijn de volgende notaties gebruikelijk:

$$\begin{aligned} f \text{ of } f^{(0)}, f', f'', f''', f^{(iv)} \text{ of } f^{(4)}, f^{(v)} \text{ of } f^{(5)}, \dots, f^{(n)}, \dots, \\ f, Df, D^2f, D^3f, \dots, D^n f, \dots \\ f, \frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d^3f}{dx^3}, \dots, \frac{d^n f}{dx^n}, \dots \end{aligned}$$

In de notaties van het laatste type is er van uitgegaan dat uit de context blijkt dat x de naam is van de onafhankelijk veranderlijke.

5.2.3 Opmerking. Als $f^{(n)}(a)$ bestaat, dan bestaan ook $f^{(n-1)}(a), \dots, f'(a)$. Inderdaad, als $f^{(n)}(a)$ bestaat, dan is dit getal de afgeleide in a van de functie $f^{(n-1)}$. Bijgevolg bestaat de functie $f^{(n-1)}$ in een omgeving van a , in het bijzonder in a zelf, enz.

5.2.4 Definitie. Een functie f is **van klasse C^n** (met $n \in \{1, 2, \dots\}$) over een open interval $]a, b[\subseteq \mathcal{D}_f$ als $f^{(n)}$ bestaat en continu is in elk punt van $]a, b[$.

Voor $n = 1$ vinden we de gladde functies terug die al eerder gedefinieerd zijn. Voor $n > 1$ beschouwen we enkel *open* intervallen.

5.2.5 Notatie. De verzameling van alle functies die over het open interval $]a, b[$ van klasse C^n zijn noteert men als $C^n(]a, b[)$.

5.2.6 Definitie. Is $f \in C^n(]a, b[)$ voor elke $n = 1, 2, \dots$, dan noemen we f **van klasse C^∞** of **onbepaald afleidbaar**¹¹ over $]a, b[$, en we noteren $f \in C^\infty(]a, b[)$.

¹¹In het Engels: *infinitely smooth*

5.2.7 Opmerkingen.

1. Als $f^{(n)}$ bestaat op $]a, b[$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, dan is $f \in C^\infty(]a, b[)$: $f^{(n)}$ is op $]a, b[$ immers automatisch continu, want afleidbaar.
2. Is $f \in C^n(]a, b[)$ ($n \in \{1, 2, \dots\}$), dan ook $f \in C^{n-1}(]a, b[)$.

5.2.8 Notatie. We schrijven $C(J)$ of $C^0(J)$ voor de verzameling van alle functies die continu zijn over het (open of gesloten) interval J .

5.2.9 Quiz. Waar of niet waar?

1. Als een afleidbare afbeelding $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ haar maximum bereikt in een punt $a \in \mathbb{R}$, dan is $f'(a) = 0$.
2. Als $f \in C^1([0, 1])$ haar maximum bereikt in een punt $a \in [0, 1]$, dan is $f'(a) = 0$.

5.3 Oefeningen

Onderzoek afleidbaarheid van de functies uit §4.3.

Je mag hierbij aannemen dat de afbeeldingen $\ln: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ afleidbaar zijn op heel hun domein (zie Hoofdstuk 7).

Hoofdstuk 6

Integratie

Wiskundige analyse vindt haar oorsprong in het modelleren van fenomenen uit de werkelijkheid (bijv. in de fysica) d.m.v. wiskundige objecten. De integraal die we in dit hoofdstuk behandelen is daar een voorbeeld van: het intuïtieve begrip ‘oppervlakte (onder de beeldlijn van een functie)’ wordt wiskundig gemodelleerd a.d.h.v. de integraal: een getal dat verkregen wordt door een limietproces (beschreven in de volgende paragraaf). Of dat getal werkelijk de intuïtieve notie van oppervlakte weergeeft, kunnen we niet bewijzen. Maar eenmaal we de definitie van de integraal aannemen, kunnen we wel haar eigenschappen bewijzen en vaststellen dat deze goed overeenkomen met onze intuïties over oppervlakte, waardoor de integraal een goed model oplevert.

6.1 Onderintegraal, bovenintegraal en integraal

De integratietheorie in één veranderlijke werd in 1854, na eeuwen evolutie, door Riemann op punt gesteld. De eenvoudige benadering met onder- en bovenintegralen, die wij volgen, danken we aan Darboux (1875).

Om die theorie op te kunnen bouwen is enkel vereist: een begrensde functie f over een open interval $]a, b[$.¹

6.1.1 Notatie. Wij noteren

$$I =]a, b[, \quad \ell = b - a, \quad M = \sup_I f, \quad m = \inf_I f.$$

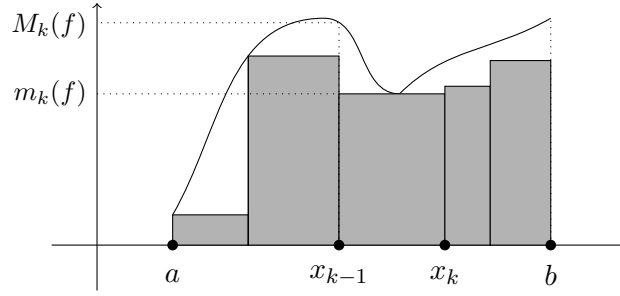
6.1.2 Definitie. Een **partitie** van I is een eindige verzameling van punten $x_k \in [a, b]$, **verdeelpunten** genaamd, die volgens stijgende grootte genummerd worden, met a als eerste en b als laatste verdeelpunt.

De verzameling van alle partities van I noteren we als $\Pi(I)$.

Is π , bestaande uit $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ een partitie, dan noemen we $]x_{k-1}, x_k[$ (met $k = 1, 2, \dots, n$) het k -de interval van de partitie.

6.1.3 Notatie. We noteren

$$I_k =]x_{k-1}, x_k[, \quad \ell_k = x_k - x_{k-1}, \quad M_k(f) = \sup_{I_k} f, \quad m_k(f) = \inf_{I_k} f.$$



Figuur 6.1: De ondersom $s_\pi(f)$ is gelijk aan de gekleurde oppervlakte.

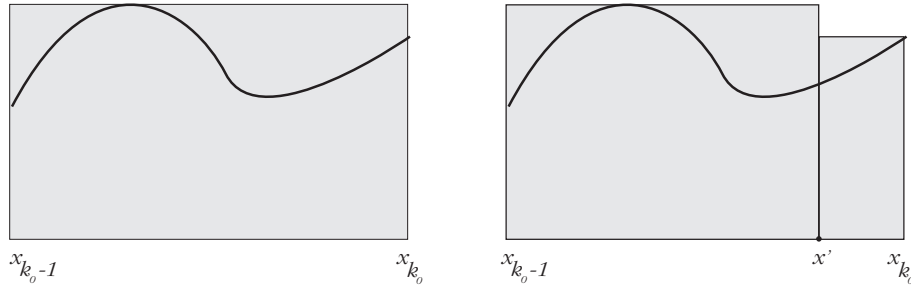
6.1.4 Definitie. De **bovensom** $S_\pi(f)$ en de **ondersom** $s_\pi(f)$ van f m.b.t. de partitie $\pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ worden gedefinieerd als

$$S_\pi(f) = \sum_{k=1}^n M_k(f) \ell_k, \quad s_\pi(f) = \sum_{k=1}^n m_k(f) \ell_k.$$

In deze context stellen π , π' enz. steeds partities van I voor. Als f uit de context blijkt schrijven we kortweg S_π, s_π, M_k, m_k i.p.v. $S_\pi(f), s_\pi(f), M_k(f), m_k(f)$.

6.1.5 Stelling.

1. Voegt men aan een partitie verdeelpunten toe, dan wordt de ondersom niet kleiner en de bovensom niet groter.
2. Een willekeurige ondersom is kleiner dan of gelijk aan een willekeurige bovensom.



Figuur 6.2: Invloed van extra verdeelpunt op de bovensom.

Bewijs. 1. Als aan π een verdeelpunt toegevoegd wordt, stel x' , met $x_{k_0-1} < x' < x_{k_0}$, dan wordt in S_π de term $M_{k_0} \ell_{k_0}$ vervangen door de twee termen

$$(x' - x_{k_0-1}) \sup_{]x_{k_0-1}, x'[} f + (x_{k_0} - x') \sup_{]x', x_{k_0}[} f$$

die samen, wegens

$$\sup_{]x_{k_0-1}, x'[} f \leq M_{k_0}, \quad \sup_{]x', x_{k_0}[} f \leq M_{k_0},$$

¹Dit betekent niet dat elke begrensde functie integreerbaar is!

hoogstens

$$M_{k_0}((x' - x_{k_0-1}) + (x_{k_0} - x')) = M_{k_0} \ell_{k_0}$$

zijn. Vandaar $S_{\pi'} \leq S_{\pi}$. Analoog voor de ondersom.

2. Beschouw twee willekeurige partities π en π' . De partitie $\pi'' := \pi \cup \pi'$ bevat alle punten van π en van π' , zodat wegens 1. $s_{\pi} \leq s_{\pi''} \leq S_{\pi''} \leq S_{\pi'}$. $\square$

De verzameling van de ondersommen is nietleeg en naar boven begrensd door b.v. $M(b-a)$ (dit is de bovensom die hoort bij de partitie met twee verdeelpunten $x_0 = a$ en $x_1 = b$). Evenzo is de verzameling van de bovensommen nietleeg en naar beneden begrensd door b.v. $m(b-a)$. Hierop zijn de volgende definities gebaseerd.

6.1.6 Definitie. De **onderintegraal** van f over I is

$$\int_a^b f := \sup\{s_{\pi}(f) \mid \pi \in \Pi(I)\}.$$

We noteren het rechterlid ook kort als $\sup_{\pi} s_{\pi}(f)$.

Voor een nietnegatieve functie f is $\int_a^b f$, meetkundig gezien, de beste ‘te kleine’ benadering voor de oppervlakte onder de beeldlijn.

6.1.7 Definitie. De **bovenintegraal** van f over I is

$$\overline{\int_a^b f} := \inf\{S_{\pi}(f) \mid \pi \in \Pi(I)\}.$$

We noteren het rechterlid ook kort als $\inf_{\pi} S_{\pi}(f)$.

Voor een nietnegatieve functie f is $\overline{\int_a^b f}$, meetkundig gezien, de beste ‘te grote’ benadering voor de oppervlakte onder de beeldlijn.

Elke begrensde functie heeft dus een onder- en een bovenintegraal, en

$$\int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f}.$$

Inderdaad, voor willekeurige partities π, π' is wegens 6.1.5.2

$$s_{\pi} \leq S_{\pi'},$$

zodat

$$\int_a^b f := \sup_{\pi} s_{\pi} \leq S_{\pi'},$$

en hieruit op zijn beurt

$$\int_a^b f \leq \inf_{\pi'} S_{\pi'} =: \overline{\int_a^b f}.$$

6.1.8 Definitie. Als

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b f}, \quad (6.1)$$

dan noemt men f **integreerbaar** over I . In dat geval noemt men de gemeenschappelijke waarde in (6.1) de **integraal** van f over I , en men noteert hiervoor

$$\int_a^b f.$$

Voor een nietnegatieve integreerbare functie f definieert $\int_a^b f$, meetkundig gezien, de oppervlakte onder de beeldlijn.

6.1.9 Notatie. De verzameling van alle functies die over I integreerbaar zijn noteren wij² als $\mathcal{R}(I)$.

6.1.10 Definitie. Als f integreerbaar over $]a, b[$ is, dan definieert men

$$\int_b^a f := - \int_a^b f.$$

6.1.11 Definitie. Voor gelijk welke functie f stelt men nog

$$\int_a^a f := 0.$$

In al deze gevallen noemt men f het **integrandum**³ en I het **integratie-interval**. Vaak gebruikt men ook notaties met een z.g. **integratieveranderlijke**. Men noteert dan b.v.

$$\int_a^b f(x) dx.$$

De integratieveranderlijke is een spookveranderlijke⁴, die men door gelijk welke andere vrije letter kan vervangen, m.a.w.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(t) dt = \dots = \int_a^b f.$$

Ook notaties als $\int_I f$, met het integratie-interval onder de integraal genoteerd, komen voor.

6.1.12 Opmerkingen.

1. Men spreekt, met dezelfde betekenis, van partities van $]a, b[$ of van $[a, b]$, van functies integreerbaar over $]a, b[$ of over $[a, b]$, en men noemt $\int_a^b f$ de integraal van f over $]a, b[$ of over $[a, b]$.
2. De integraal van f over $[a, b]$ houdt geen rekening met eventuele functiewaarden $f(x)$ voor x buiten $]a, b[$. Voor zover het eigenschappen van $\int_a^b f$ betreft mag men dus aannemen dat f enkel in dat interval gedefinieerd is. Men zegt b.v. ‘In de integraal $\int_a^{a+h} f(x) dx$ (met $h > 0$) verandert x tussen a en $a + h$ ’, of ‘ $a \leq x \leq a + h$ ’.

²met de ‘R’ van ‘Riemann’

³Latijn voor *wat geïntegreerd moet worden*. Meervoud: integranda.

⁴Engels: *dummy variable*

6.1.13 Voorbeelden.

1. Voor $f(x) := 1$ hebben we dat $s_\pi = S_\pi = b - a$ voor elke partitie van I . Bijgevolg is $\int_a^b dx = b - a$.
2. Stel $f(x) := 1$ als $x \in I \cap \mathbb{Q}$, en $f(x) := 0$ als $x \in I \setminus \mathbb{Q}$. Dan is $s_\pi = 0$ en $S_\pi = b - a$ voor elke partitie van I . Bijgevolg is $\underline{\int_a^b} f = 0$ en $\overline{\int_a^b} f = b - a$. Deze f is niet integreerbaar over I .

We geven van integreerbaarheid nu een kenmerk waarin de integraal zelf niet vermeld wordt.

6.1.14 Stelling (Kenmerk van Darboux). *De afbeelding $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ is integreerbaar over I juist als (i) f begrensd is over I , en (ii) er bij elke $\varepsilon > 0$ een partitie π van I bestaat met de eigenschap dat*

$$S_\pi - s_\pi < \varepsilon.$$

Bewijs. 1. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Als f integreerbaar is over I , dan is f bij definitie begrensd over I . Door de definitie van de bovenintegraal als infimum van bovensommen volgt dat er een π_1 bestaat waarvoor

$$S_{\pi_1} < \overline{\int_a^b} f + \varepsilon/2 = \int_a^b f + \varepsilon/2.$$

Analoog verkrijgt men een π_2 waarvoor

$$s_{\pi_2} > \underline{\int_a^b} f - \varepsilon/2 = \int_a^b f - \varepsilon/2.$$

Hieruit volgt

$$S_{\pi_1} - s_{\pi_2} < \varepsilon.$$

Stellen we $\pi := \pi_1 \cup \pi_2$, dan is π een partitie van I met $\pi \supseteq \pi_1$ (en dus $S_\pi \leq S_{\pi_1}$) en $\pi \supseteq \pi_2$ (en dus $s_\pi \geq s_{\pi_2}$). Vandaar

$$S_\pi - s_\pi \leq S_{\pi_1} - s_{\pi_2} < \varepsilon.$$

2. Omgekeerd, veronderstel dat f begrensd is (waardoor onder- en bovenintegralen bestaan), en dat er bij elke $\varepsilon > 0$ een partitie π van I bestaat waarvoor $S_\pi - s_\pi < \varepsilon$. Dan

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq S_\pi - s_\pi < \varepsilon.$$

Na $\varepsilon \rightarrow 0$ volgt uit $0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon$ dat

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f.$$

□

6.1.15 Opmerking. Zoals dat ook al in 1.2.15 opgemerkt is: men hoeft niet *alle* positieve ε 's te bekijken, maar mag zich beperken tot ε 's *die klein genoeg zijn*.

6.2 Eigenschappen van de integraal

6.2.1 Stelling (Lineariteit van de integraal).

1. Is f integreerbaar over I , dan is ook cf (met c constant) integreerbaar over I en

$$\int_a^b (cf) = c \int_a^b f.$$

2. Zijn f en g integreerbaar over I , dan is ook $f + g$ integreerbaar over I en

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Bewijs. 1. Als f begrensd is, dan cf ook, want $|cf| = |c||f|$. We moeten aantonen dat

$$\int_a^b cf = \overline{\int_a^b cf} = c \int_a^b f.$$

We geven het bewijs voor $c \leq 0$. (Geval $c \geq 0$ analoog.) Wegens stelling 1.2.17.3 is

$$s_\pi(cf) = \sum_{k=1}^m \ell_k \inf_{I_k}(cf) = c \sum_{k=1}^m \ell_k \sup_{I_k} f = c S_\pi(f)$$

waaruit

$$\int_a^b (cf) = \sup_{\pi} s_\pi(cf) = \sup_{\pi} (c S_\pi(f)) = c \inf_{\pi} S_\pi(f) = c \overline{\int_a^b f} = c \int_a^b f$$

en analoog voor de bovenintegraal. Er volgt dan dat

$$\int_a^b (cf) = \overline{\int_a^b (cf)} = c \int_a^b f,$$

en dit betekent dat cf integreerbaar over I is, met $c \int_a^b f$ als integraal.

2. Als f en g begrensd zijn, dan is $f + g$ dat ook, want $|f + g| \leq |f| + |g|$. We moeten aantonen dat

$$\int_a^b (f + g) = \overline{\int_a^b (f + g)} = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Daartoe volstaat

$$\overline{\int_a^b (f + g)} \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b (f + g) \quad (6.2)$$

want door $\int_a^b (f + g) \leq \overline{\int_a^b (f + g)}$ worden de twee ongelijkheden in (6.2) gelijkheden.

We bewijzen expliciet de laatste ongelijkheid in (6.2); analoog voor de eerste. Kies twee willekeurige partities π_1 en π_2 . Stellen we $\pi := \pi_1 \cup \pi_2$, dan is π een partitie van I met $\pi \supseteq \pi_1$ en $\pi \supseteq \pi_2$. Wegens 1.2.23.1 geldt in elk deelinterval I_k van π dat

$$\ell_k \inf_{I_k} f + \ell_k \inf_{I_k} g \leq \ell_k \inf_{I_k} (f + g),$$

zodat na optelling

$$s_{\pi_1}(f) + s_{\pi_2}(g) \leq s_{\pi}(f) + s_{\pi}(g) \leq s_{\pi}(f+g) \leq \int_a^b (f+g).$$

Nemen we hierin het supremum over alle mogelijke π_2 (met π_1 vast), dan volgt wegens 1.2.22.2

$$s_{\pi_1}(f) + \int_a^b g = s_{\pi_1}(f) + \int_a^b g \leq \int_a^b (f+g),$$

en door vervolgens het supremum over alle mogelijke π_1 te nemen

$$\int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b (f+g).$$

□

6.2.2 Stelling (Positiviteit van de integraal). *Is f integreerbaar over I en is $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in I$, dan is $\int_a^b f \geq 0$.*

Bewijs. In elke ondersom s_{π} is elke $m_i \geq 0$, zodat elke $s_{\pi} \geq 0$. Vandaar volgt voor het supremum van de ondersommen: $\int_a^b f \geq s_{\pi} \geq 0$, d.i. $\int_a^b f \geq 0$. □

6.2.3 Opmerking. *Als $f(x) > 0$ voor alle $a < x < b$ en als f in minstens één punt $x_0 \in]a, b[$ continu is, dan is $\int_a^b f > 0$.⁵ Inderdaad, wegens behoud van teken is $f(x) > f(x_0)/2$ in een bepaald interval $I_k \ni x_0$, hieruit volgt $m_k \geq \ell_k f(x_0)/2 > 0$, en dus $\int_a^b f > 0$, d.i. $\int_a^b f > 0$.*

6.2.4 Stelling (De integraal is stijgend). *Zijn f en g integreerbaar over I , met $f(x) \leq g(x)$ voor alle $x \in I$, dan is*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Bewijs. Wegens 6.2.1 is $g - f$ integreerbaar over I , en $g(x) - f(x) \geq 0$ voor $x \in I$. Vandaar

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g - f) \geq 0.$$

□

6.2.5 Hulpstelling. *Als f integreerbaar is over $I =]a, b[$, dan is f ook integreerbaar over elk nietleeg deelinterval $J =]c, d[\subseteq]a, b[$.*

Bewijs. Kies willekeurig $\varepsilon > 0$. Door het kenmerk van Darboux bestaat een partitie π van I waarvoor $S_{\pi} - s_{\pi} \leq \varepsilon$. Noem $\pi' := \pi \cup \{c, d\}$. Omdat $\pi \subseteq \pi'$, is ook $S_{\pi'} - s_{\pi'} \leq S_{\pi} - s_{\pi} \leq \varepsilon$. Definieren we $\pi_J := \pi' \cap [c, d]$, dan is (met $\pi' = \{x_0, \dots, x_n\}$)

$$S_{\pi_J} - s_{\pi_J} = \sum_{k: I_k \subseteq]c, d[} (M_k(f) - m_k(f))\ell_k \leq \sum_{k=1}^n (M_k(f) - m_k(f))\ell_k = S_{\pi'} - s_{\pi'} \leq \varepsilon.$$

Door het kenmerk van Darboux is f integreerbaar over J . □

⁵We zullen in *Wiskundige Analyse IIb* zien dat een integreerbare functie in feite steeds in tenminste één punt continu is.

6.2.6 Stelling (Additiviteit van de integraal). Zij $a < c < b$. Is f integreerbaar over $]a, b[$, dan ook over $]a, c[$ en over $]c, b[$; omgekeerd, is f integreerbaar over $]a, c[$ en over $]c, b[$, dan ook over $]a, b[$. In beide gevallen geldt de identiteit

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \quad (6.3)$$

Bewijs. 1. Als f integreerbaar is over $]a, b[$, dan is f ook integreerbaar over $]a, c[$ en over $]c, b[$ wegens de hulpstelling.

2. Veronderstel nu dat f integreerbaar is over $]a, c[$ en over $]c, b[$. Kies willekeurig een partitie π_L van $]a, c[$ en een partitie π_R van $]c, b[$. Voor de partitie $\pi := \pi_L \cup \pi_R$ van I hebben we dan

$$s_{\pi_L} + s_{\pi_R} = s_{\pi} \leq \int_a^b f.$$

Door achtereenvolgens het supremum te nemen over alle π_L en over alle π_R volgt

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \leq \int_a^b f.$$

Via de bovensommen volgt analoog

$$\int_a^c f + \int_c^b f \geq \overline{\int_a^b f}.$$

Omdat $\int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f}$ moet dus

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b f} = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

zodat f integreerbaar is over I en de gezochte formule geldt. $\square$

6.2.7 Opmerking. De formule (6.3) is geldig voor alle drietallen a, b, c , niet enkel als $a < c < b$. Als b.v. $a < b < c$, dan is wegens (6.3) (met de rollen van b en c omgewisseld)

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Vandaar

$$\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

6.2.8 Gevolg. Zij f integreerbaar over I , en $J =]c, d[$ een nietleeg open deelinterval van I . Is $f(x) \geq 0$ over $I \setminus J$, dan is $\int_c^d f \leq \int_a^b f$.

Bewijs. Wegens

$$\int_a^c f \geq 0, \quad \int_d^b f \geq 0$$

is

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^b f \geq \int_c^d f.$$

$\square$

6.2.9 Stelling. *Zij f integreerbaar over $]a, b[$. Wordt f in een eindig aantal punten van $]a, b[$ gewijzigd, dan blijft f integreerbaar en haar integraal verandert niet.*

Bewijs. Veronderstel dat f gewijzigd wordt in de punten $c_1 < \dots < c_m$ van $]a, b[$. Door additiviteit geldt

$$\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \dots + \int_{c_m}^b f.$$

De integraal van f over $]a, c_1[$ verandert niet door f te wijzigen in de eindpunten a, c_1 van het integratie-interval, want de eindpunten van het integratie-interval spelen in de definities van onder- en bovensom geen enkele rol. Evenmin verandert de integraal over $]c_1, c_2[$, enzovoort. De gehele integraal blijft dus onveranderd. $\square$

6.2.10 Opmerking. Om een functie f over $]a, b[$ te kunnen integreren hoeft ze dus niet overal in $]a, b[$ gedefinieerd te zijn. Als f in een eindig aantal punten van het interval ongedefinieerd is, stel daar de functie gelijk aan (b.v.) nul.

6.2.11 Hulpstelling. *Is f continu over $[a, b]$, dan is f integreerbaar over $]a, b[$.*

Bewijs. Kies willekeurig $\varepsilon > 0$. Door de stelling van Heine is f gelijkmatig continu over het compact interval $[a, b]$. Er bestaat dus een $\delta_\varepsilon > 0$ met de eigenschap dat $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$ voor alle punten x en x' uit $[a, b]$ waarvoor $|x - x'| < \delta_\varepsilon$. Verdeel het interval $[a, b]$ in een aantal (stel N) intervallen met een gelijke lengte $L < \delta_\varepsilon$, en bekijk de partitie π van $]a, b[$ met als opeenvolgende deelpunten

$$a < a + L < a + 2L < \dots < a + NL = b.$$

Hiervoor is wegens 1.2.25

$$S_\pi - s_\pi = \sum_{k=1}^N (M_k(f) - m_k(f)) \ell_k = \sum_{k=1}^N \sup_{x, x' \in I_k} |f(x) - f(x')| \ell_k \leq \varepsilon \sum_{k=1}^N \ell_k = (b - a)\varepsilon.$$

Wegens het kenmerk van Darboux is f dus integreerbaar over $]a, b[$. $\square$

6.2.12 Stelling. *Is f over $]a, b[$ continu en begrensd, dan is f integreerbaar over $]a, b[$.*

Bewijs. We nemen een willekeurige $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$. Omdat f continu is op $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ bestaat wegens de hulpstelling een partitie π van $]a + \varepsilon, b - \varepsilon[$ waarvoor $S_\pi - s_\pi \leq \varepsilon$. Dan is $\pi' := \pi \cup \{a, b\}$ een partitie van $]a, b[$ waarvoor

$$S_{\pi'} - s_{\pi'} = \left(\sup_{]a, a+\varepsilon[} f - \inf_{]a, a+\varepsilon[} f \right) \varepsilon + S_\pi - s_\pi + \left(\sup_{]b-\varepsilon, b[} f - \inf_{]b-\varepsilon, b[} f \right) \varepsilon \leq (1 + 2(M - m))\varepsilon.$$

Wegens het kenmerk van Darboux is f dus integreerbaar over $]a, b[$. $\square$

6.2.13 Gevolg. *Als f continu is over $]a, b[$ behalve in een eindig aantal punten, en begrensd over $]a, b[$, dan is f integreerbaar over $]a, b[$.*

Bewijs. Als f continu is over $]a, c[$ en over $]c, b[$, dan is f door de vorige stelling integreerbaar over $]a, c[$ en over $]c, b[$. Wegens 6.2.6 is f dan ook integreerbaar over $]a, b[$. Analoog als f in meer dan één punt van $]a, b[$ discontinu is (door 6.2.6 verschillende keren toe te passen). $\square$

6.2.14 Stelling. Als f integreerbaar is over $I =]a, b[$, dan is ook $|f|$ integreerbaar over I , en we hebben de volgende **driehoeksongelijkheid voor integralen**:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \quad (6.4)$$

Bewijs. Kies $\varepsilon > 0$ en een partitie π van I waarvoor $S_\pi(f) - s_\pi(f) < \varepsilon$. Wegens de driehoeksongelijkheid en 1.2.25 is

$$M_k(|f|) - m_k(|f|) = \sup_{x, x' \in I_k} ||f(x)| - |f(x')|| \leq \sup_{x, x' \in I_k} |f(x) - f(x')| = M_k(f) - m_k(f).$$

Na vermenigvuldiging met ℓ_k en optelling volgt dat $S_\pi(|f|) - s_\pi(|f|) \leq S_\pi(f) - s_\pi(f) < \varepsilon$. Door het kenmerk van Darboux is $|f|$ dus integreerbaar over I .

Verder zijn $f(x) \leq |f(x)|$ en $-f(x) \leq |f(x)|$ voor alle $x \in I$, zodat

$$\int_a^b f \leq \int_a^b |f| \quad \text{en} \quad -\int_a^b f = \int_a^b (-f) \leq \int_a^b |f|$$

en dus ook

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

□

6.2.15 Opmerkingen.

1. Voor het interval met a en b als uiteinden (met eventueel $a > b$) vereist de driehoeksongelijkheid een extra stel absolute-waarde strepen:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right|. \quad (6.5)$$

Inderdaad, voor $a < b$ is dat de driehoeksongelijkheid (6.4) en voor $a > b$ is

$$\left| \int_a^b f \right| = \left| \int_b^a f \right| \leq \int_b^a |f| = -\int_a^b |f| = \left| \int_a^b |f| \right|.$$

2. Als, in het interval met a en b als uiteinden (met eventueel $a > b$), de functies f en g integreerbaar zijn en $|f| \leq g$, dan is

$$\left| \int_a^b |f| \right| \leq \left| \int_a^b g \right|. \quad (6.6)$$

Dat bewijst men op dezelfde manier als (6.5), door de gevallen $a < b$ en $a > b$ afzonderlijk te bekijken.

3. Het kan gebeuren dat $|f|$ integreerbaar is, en f niet. Een voorbeeld: als

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ -1 & (x \notin \mathbb{Q}), \end{cases}$$

dan is f niet integreerbaar over $[0, 1]$ (onderintegraal -1 , bovenintegraal 1), maar $|f|$ (constant 1) blijkbaar wel.

6.2.16 Stelling. *Zijn f en g beide integreerbaar over I , dan is ook fg integreerbaar over I .*

Bewijs. Omdat f en g integreerbaar zijn, zijn beide ook begrensd, stel $|f(x)| \leq K$ en $|g(x)| \leq K$ voor alle $x \in I$. Kies $\varepsilon > 0$. Dan bestaat een partitie $\pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ van I waarvoor $S_\pi(f) - s_\pi(f) < \varepsilon$ en $S_\pi(g) - s_\pi(g) < \varepsilon$. Wegens 1.2.22 en 1.2.25 is

$$\begin{aligned} M_k(fg) - m_k(fg) &= \sup_{x, x' \in I_k} |f(x)g(x) - f(x')g(x')| \\ &= \sup_{x, x' \in I_k} |(f(x) - f(x'))g(x) + f(x')(g(x) - g(x'))| \\ &\leq K \sup_{x, x' \in I_k} |f(x) - f(x')| + K \sup_{x, x' \in I_k} |g(x) - g(x')|. \end{aligned}$$

Als we vermenigvuldigen met ℓ_k en optellen, krijgen we

$$S_\pi(fg) - s_\pi(fg) \leq K(S_\pi(f) - s_\pi(f)) + K(S_\pi(g) - s_\pi(g)) < 2K\varepsilon.$$

Door het kenmerk van Darboux is fg dus integreerbaar. $\square$

6.2.17 Stelling (Middelwaardestelling in integraalvorm⁶). *Als f continu is op $[a, b]$, dan bestaat er minstens één $c \in [a, b]$ waarvoor*

$$\int_a^b f = (b - a)f(c).$$

Bewijs.

$$m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a),$$

zodat $\frac{1}{b-a} \int_a^b f \in [m, M]$. Door de extremumstelling bestaan $x, y \in [a, b]$ met $f(x) = m$ en $f(y) = M$. Door de tussenwaardestelling bestaat dan $c \in [a, b]$ met $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$. $\square$

6.2.18 Opmerking. Als f integreerbaar maar niet continu is, dan geldt de vorige stelling niet. Kies bijv. $f(x) = 0$ op $[a, \frac{a+b}{2}]$ en $f(x) = 1$ op $[\frac{a+b}{2}, b]$, dan is de gemiddelde waarde $\frac{1}{b-a} \int_a^b f = \frac{1}{2}$, maar er bestaat geen $c \in [a, b]$ waarvoor $f(x) = \frac{1}{2}$.

6.3 Oneigenlijke integraal over een begrensd interval

Voor de praktijk is het nuttig om, onder bepaalde voorwaarden, ook een betekenis te kunnen geven aan $\int_a^b f$ voor functies f die *net niet* integreerbaar zijn over een interval $]a, b[$ (b.v. omdat f onbegrensd is in elke omgeving van a):

6.3.1 Definitie.

1. Als een functie $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ over elk interval $]x, b[$ ($a < x \leq b$) integreerbaar is en $\lim_{x \rightarrow a+} \int_x^b f \in \mathbb{R}$ bestaat, dan noteren we

$$\int_a^b f := \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^b f.$$

⁶De stelling ontleent haar naam aan het feit dat $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$ de gemiddelde waarde is van f op $[a, b]$. De integraal wordt trouwens in de wetenschappen vooral fysiek geïnterpreteerd als (gewogen) gemiddelde van een functie (in veel gevallen niet als ‘oppervlakte onder een kromme’).

2. Analoog, als f over elk interval $]a, x[$ ($a \leq x < b$) integreerbaar is en $\lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f \in \mathbb{R}$ bestaat, dan noteren we

$$\int_a^b f := \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f.$$

Als de integraal enkel in deze uitgebreide betekenis bestaat, noemt men haar **oneigenlijk**. In het andere geval (d.w.z. als f integreerbaar is over $]a, b[$) noemt men de integraal **eigenlijk**.

We tonen aan dat deze nieuwe notatie geen aanleiding kan geven tot verwarring, d.w.z.: als f integreerbaar is over $]a, b[$, dan gelden de gelijkheden die de oneigenlijke integraal definiëren automatisch ook voor de eigenlijke integraal.

6.3.2 Stelling (Continuïteit van een integraal met veranderlijke bovengrens).

Veronderstel dat f integreerbaar is over het interval $]a, b[$ en dat $c \in [a, b]$. Definieer de functie

$$F(x) := \int_c^x f \quad (a \leq x \leq b).$$

Dan is F continu over $[a, b]$.

Bewijs. Stel $|f| \leq M$ in $]a, b[$. (Door desnoods M te vergroten mogen we aannemen dat $M > 0$.) Voor willekeurige x en x' in $[a, b]$ is

$$F(x) - F(x') = \int_c^x f - \int_c^{x'} f = \int_c^x f + \int_{x'}^c f = \int_{x'}^x f,$$

zodat wegens de driehoeksongelijkheid en (6.6)

$$|F(x) - F(x')| \leq \left| \int_{x'}^x |f| \right| \leq \left| \int_{x'}^x M \right| = M|x - x'|.$$

Dan is $|F(x) - F(x')| < \varepsilon$ zodra $|x - x'| < \varepsilon/M = \delta_\varepsilon$, zodat F continu is over $[a, b]$. $\square$

Als f integreerbaar is over $]a, b[$ en we kiezen in de vorige stelling i.h.b. $c = a$, dan is $F(b) = F(b-)$ omdat F continu is over $[a, b]$. Dit betekent juist dat $\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f$. Analoog is $\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^b f$.

6.3.3 Definitie. Als, meer algemeen dan in 6.3.1, $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ over elk interval $]x, y[$ ($a < x < y < b$) integreerbaar is, bekijk dan een tussenpunt $c \in]a, b[$. Als $\lim_{x \rightarrow a+} \int_x^c f$ en $\lim_{x \rightarrow b-} \int_c^x f$ bestaan, dan bestaan de oneigenlijke integralen $\int_a^c f$ en $\int_c^b f$, zodat we in dat geval

$$\int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b f$$

noteren.⁷ Ook deze integraal noemen we oneigenlijk als f niet integreerbaar is over $]a, b[$.

⁷Door additiviteit hangt deze definitie niet af van het gekozen tussenpunt.

6.4 De hoofdstellingen

In de hoofdstellingen tonen we een belangrijk verband aan tussen afgeleiden en integralen.⁸ We onderzoeken nu de afgeleide van een integraal met veranderlijke bovengrens. In de volgende stelling is het open interval J niet noodzakelijk begrensd.

6.4.1 Stelling (Eerste hoofdstelling: afgeleide van een integraal met veranderlijke bovengrens).⁹ *Is f over het open interval J continu, en is $c \in J$, dan bestaat de functie*

$$F(x) := \int_c^x f \quad (x \in J)$$

en is $F'(x) = f(x)$ voor elke $x \in J$.

Bewijs. Merk op dat $F(x)$ bestaat voor elke $x \in J$, omdat f continu is over $[c, x]$ (resp. $[x, c]$), en dus integreerbaar over $]c, x[$ (resp. $]x, c[$).

Neem willekeurig $x_0 \in J$. Om $F'(x_0)$ te berekenen, bekijken we eerst voor voldoende kleine $h > 0$ (zo dat $x_0 + h \in J$)

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_c^{x_0+h} f - \int_c^{x_0} f \right) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f.$$

Het rechterlid is de gemiddelde waarde van f op $[x_0, x_0 + h]$. Omdat f continu is, verwachten we al dat deze naar $f(x_0)$ zal naderen als $h \rightarrow 0$. Formeel tonen we dit als volgt aan. Door de middelwaardestelling in integraalvorm is $\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f = f(c_h)$, voor zekere $c_h \in [x_0, x_0 + h]$. Door de sandwich-regel is $c_h \rightarrow x_0$ als $h \rightarrow 0+$, en dus ook $f(c_h) \rightarrow f(x_0)$ omdat f continu is in x_0 . Daardoor is

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Analoog voor de linkerlimiet. □

6.4.2 Opmerking. Als $J =]a, b[$ en f bovendien begrensd is over $]a, b[$, dan kan men in de vorige stelling ook $c = a$ (of, via een analoge redenering, $c = b$) kiezen. Dan is f immers integreerbaar over $]a, b[$, zodat $F(x) := \int_a^x f$ bestaat en $F(x) = \int_a^x f + \int_a^d f$ (met $d \in]a, b[$). Door de vorige stelling is nog steeds $F'(x) = f(x) - 0 = f(x)$ voor alle $x \in J$.

De eerste hoofdstelling kan schematisch genoteerd worden als

$$\left(\int_c^x f \right)' = f(x) \quad \text{als } f \text{ continu is.}$$

Men zegt informeel dat integreren en afleiden inverse bewerkingen zijn.

⁸Dat zulk verband bestaat, werd al tersluiks gesuggereerd door het bestaan van twee vormen van de middelwaardestelling: passen we de middelwaardestelling in integraalvorm toe op f' , dan volgt $\int_a^b f' = (b-a)f'(c)$ voor zekere $c \in [a, b]$. Vergelijken we dit met de middelwaardestelling $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$, dan suggereert dit reeds (maar het geeft nog geen bewijs!!) dat $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

⁹De beide hoofdstellingen staan als vijfde resp. zevende vraagstuk behandeld in een ongepubliceerd geschrift zonder titel, bekend als *October 1666 Tract*, van de toen drieëntwintigjarige Newton.

Als eerste gedrukte versies beschouwt men Gregory, *Geometriae pars universalis* (1668), *Prop. VI* en Barrow, *Lectiones geometricae* (1668, gepubliceerd 1670), *Lectio X*, *Prop. 11*.

6.4.3 Stelling (Tweede hoofdstelling: integratie van een afgeleide). Als $f \in C^1[a, b]$, dan is

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a)$$

Bewijs. We passen de Eerste Hoofdstelling toe op f' . Omdat $f \in C^1[a, b]$, is f (na uitbreiding, zie 5.1.27) continu afleidbaar op een open interval $J \supseteq [a, b]$. We kunnen dus de Eerste Hoofdstelling toepassen, waardoor $F(x) := \int_a^x f'$ afleidbaar is met $F'(x) = f'(x)$, m.a.w. $(F - f)'(x) = 0$ op heel J . Daardoor is $F(x) - f(x)$ constant op J . I.h.b. is

$$F(b) - f(b) = F(a) - f(a), \quad \text{m.a.w.} \quad \int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

□

6.4.4 Opmerkingen.

1. Voor wie maar aan één stelling de naam *Hoofdstelling* geeft, is 6.4.3 de Hoofdstelling.¹⁰
2. Door limietovergang kunnen we 6.4.3 ook bewijzen onder zwakkere voorwaarden op f :

Als f' continu is op $]a, b[$ en $f(a+)$ en $f(b-)$ bestaan, dan is $\int_a^b f' = f(b-) - f(a+)$.

De integraal is dan mogelijks oneigenlijk.

Bewijs. We kunnen $a < x < y < b$ kiezen en 6.4.3 toepassen op $[x, y]$, zodat

$$\int_x^y f' = f(y) - f(x).$$

Nemen we hierin (bij vaste x) de limiet $y \rightarrow b-$, dan volgt

$$\int_x^b f' = f(b-) - f(x)$$

(aan het rechterlid zien we dat deze limiet zeker bestaat). Het gevraagde volgt door vervolgens de limiet $x \rightarrow a+$ te nemen. □

6.4.5 Definitie. We noemen g een **primitieve (functie)** van f (of: **stamfunctie** van f) over (of: in) een open interval J (begrensd of niet) als $g'(x) = f(x)$ voor elke $x \in J$.

Is g een primitieve van f over J , dan is ook $g + C$ (C constant) dat. Omgekeerd, zijn g en h twee primitieven van f over J , dan is $(g - h)' = 0$ in J , zodat $g - h$ constant is in J .

6.4.6 Notatie. We noteren

$$\int f$$

(zonder grenzen of integratie-interval) voor één van de oneindig vele primitieven die f heeft over een open interval J dat uit de context moet blijken.

¹⁰In het Engels: *Fundamental Theorem of Calculus*, kortweg FTC. In het Engels gebruikt men het Latijnse woord ‘Calculus’, kort voor ‘Calculus differentialis et integralis’, om elementaire analyse aan te geven. Het woord betekent ‘steentje’. (De Romeinen gebruikten steentjes voor praktisch rekenwerk.)

Dit betekent dat $\int f$ maar op een additieve constante na bepaald is,¹¹ en dat bij definitie

$$\left(\int f\right)' = f \quad \text{in } J.$$

De tweede hoofdstelling levert de eerste systematische integratietechniek uit de geschiedenis op: *integratie via primitieven*. In de praktijk wordt deze techniek als volgt toegepast:

6.4.7 Notatie. Is g gedefinieerd over $]a, b[$, met een rechterlimiet in a en een linkerlimiet in b , dan noteren we

$$[g]_a^b := g(b-) - g(a+).$$

Het rechterlid lezen we als g tussen bovengrens b en ondergrens a .

6.4.8 Stelling. Als f continu is over $]a, b[$ en $[\int f]_a^b$ bestaat,¹² dan is

$$\boxed{\int_a^b f = \left[\int f\right]_a^b} \quad (6.7)$$

Bewijs. Stel $g := \int f$ in $]a, b[$, zodat $g' = f$ in $]a, b[$. Wegens 6.4.4.2 is dan $\int_a^b g' = g(b-) - g(a+)$, d.i. het te bewijzen. $\square$

6.4.9 Voorbeeld.

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Deze integraal, als meetkundig vraagstuk verwoord ('kwadratuur van de parabool'), werd door Archimedes met geniale *ad hoc*-methodes al berekend. Door (6.7) is het een trivialiteit geworden!

6.5 Partiële integratie en substitutie

6.5.1 Stelling (Partiële integratie¹³). Als f en g van klasse C^1 zijn over $[a, b]$, dan is

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g. \quad (6.8)$$

Bewijs. Omdat $(fg)' = f'g + fg'$, is ook $fg \in C^1[a, b]$, zodat

$$\int_a^b (fg)' = [fg]_a^b.$$

Vermits fg' en $f'g$ integreerbaar zijn, betekent dit dat

$$\int_a^b f'g + \int_a^b fg' = [fg]_a^b,$$

waaruit (6.8). $\square$

¹¹Men mag dus bij $\int f$ ook '+C' schrijven, maar dat moet niet.

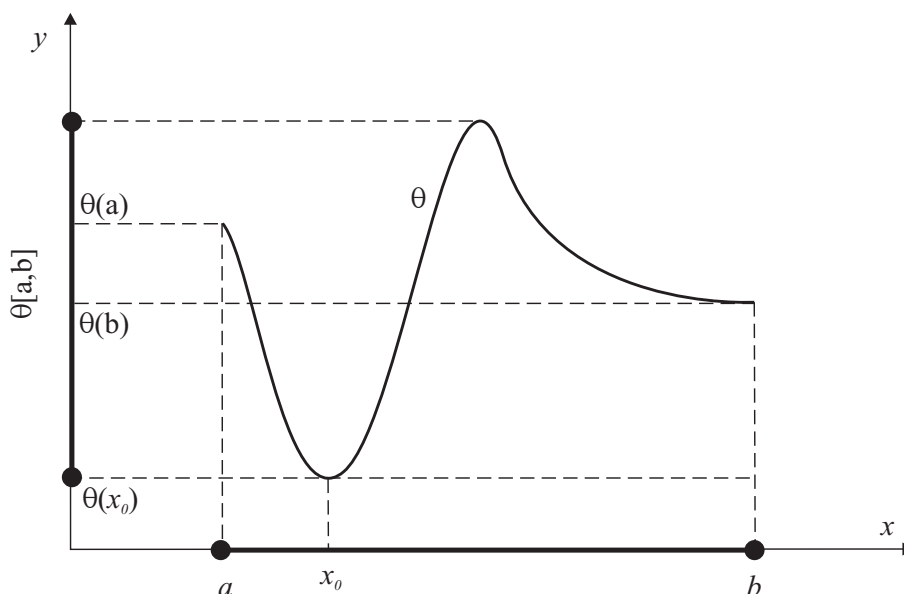
¹²Merk op dat een continue f automatisch een primitieve heeft wegens 6.4.1. De tweede voorwaarde houdt dus enkel in dat de gekozen primitieve $\int f$ een rechterlimiet heeft in a en een linkerlimiet in b . Door een redenering als in 6.4.4.2 volgt dat hieraan automatisch voldaan is als de integraal in de opgave eigenlijk is (m.a.w. als f integreerbaar is).

¹³In het Engels: *Integration by parts*

In de volgende stelling bekijken we de z.g. *transformatie* van een integraal. Gemakshalve beperken we ons tot een *continu* integrandum f .

6.5.2 Stelling (Grens-naar-grens transformatie van een integraal). Zij $a < b$, $\theta \in C^1[a, b]$ en f continu over het beeldinterval $\theta[a, b]$. Dan is

$$\int_a^b f(\theta(x)) \theta'(x) dx = \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} f(y) dy \quad (6.9)$$



Figuur 6.3: Transformatie m.b.v. θ .

Bewijs. We gaan eerst na dat de functie $(f \circ \theta)\theta'$ integreerbaar is over $]a, b[$. De eerste factor, $f \circ \theta$ is continu over $[a, b]$ en de tweede factor, θ' , is continu over $]a, b[$ en $\theta'(a+)$ en $\theta'(b-)$ bestaan. Bijgevolg is ook hun product een continue functie over $]a, b[$ waarvoor de eenzijdige limieten in de eindpunten bestaan. In het rechterlid is f integreerbaar over het interval met eindpunten $\theta(a)$ en $\theta(b)$,¹⁴ want continu over het groter interval $\theta[a, b]$.

We kunnen f uitbreiden tot een continue functie op heel $\mathbb{R}$ (bijv. constant tot aan het linker-eindpunt en vanaf het rechter-eindpunt van $\theta[a, b]$). We zullen deze uitbreiding blijven noteren als f . Door 6.4.1 heeft f dus een primitieve g op heel $\mathbb{R}$.¹⁵ Door de tweede hoofdstelling is het rechterlid dus gelijk aan $g(\theta(b)) - g(\theta(a))$. Maar door de kettingregel is ook

$$\int_a^b f(\theta(x)) \theta'(x) dx = \int_a^b (g \circ \theta)'(x) dx = (g \circ \theta)(b) - (g \circ \theta)(a),$$

vermits $g \circ \theta \in C^1[a, b]$. □

¹⁴zowel $\theta(a) \leq \theta(b)$ als $\theta(b) < \theta(a)$ is mogelijk

¹⁵Door f uit te breiden vermijden we ook subtiële problemen zoals: als $\theta(x_0) = \min(\theta[a, b])$ voor zekere $x_0 \in]a, b[$ (zie bijv. figuur 6.3), is dan g wel afleidbaar in $\theta(x_0)$? (Dit vereist immers bij definitie dat $\theta(x_0)$ een inwendig punt is van het domein van g .)

6.5.3 Opmerkingen.

1. Hier heeft de ‘lange’ notatie $\int_a^b f(x) dx$ een voordeel t.o.v. de ‘korte’ notatie $\int_a^b f$. Men gaat dan immers in (6.9) van het ene naar het andere lid over door $y = \theta(x)$ te stellen, elk van de grenzen aan te passen (‘als $x = a$, dan is $y = \theta(a)$; als $x = b$, dan is $y = \theta(b)$ ’), en de symbolische regel

$$dy = \theta'(x) dx$$

toe te passen. Een overgang als $y = \theta(x)$ in een integraal noemt men een *substitutie*.

2. Door limietovergang kunnen we (6.9) ook bewijzen onder de zwakkere voorwaarde dat f enkel continu en begrensd is op $\theta([a, b])$. Het bewijs verloopt zoals in Opm. 6.4.4.2. Het bestaan van de limieten is in dit geval gegarandeerd omdat f integreerbaar is op $\theta([a, b])$. Via een andere bewijsmethode kan men in feite aantonen dat (6.9) geldt voor elke integreerbare f op $\theta([a, b])$.

6.5.4 Definitie. Een functie f is **even** als $f(-x) = f(x)$ voor elke $x \in \mathcal{D}_f$; ze is **oneven** als $f(-x) = -f(x)$ voor elke $x \in \mathcal{D}_f$.

6.5.5 Gevolgen.

1. Is f even en continu over $[-a, a]$ (met $a > 0$), dan is $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.
2. Is f oneven en continu over $[-a, a]$ (met $a > 0$), dan is $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Bewijs. Door additiviteit en de substitutie $y = -x$ is

$$\int_{-a}^a f = \int_0^a f + \int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f - \int_a^0 f(-y) dy = \int_0^a f + \int_0^a f(-y) dy.$$

De laatste integraal is $\int_0^a f$ als f even, en $-\int_0^a f$ als f oneven is. $\square$

6.5.6 Gevolg. Is f continu en begrensd over $]a, b[$ en periodiek met periode $p := b - a$ (d.w.z. dat $f(x + p) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$), dan geldt

1. f is integreerbaar over elk begrensd interval
2. de integraal over een interval met lengte p is steeds gelijk aan de integraal over $]a, b[$.

Bewijs. 1. Omdat f continu en begrensd is over elk interval $]a + kp, b + kp[$ ($k \in \mathbb{Z}$), is f op elk zulk interval integreerbaar. Door 6.2.6 is f ook integreerbaar over elk interval $]a + lp, b + kp[$ ($l < k$), i.h.b. over een interval dat het vooraf gegeven begrensd interval omvat.

2. We nemen willekeurig $x_0 \in \mathbb{R}$ en schrijven

$$\int_{x_0}^{x_0+p} f = \int_{x_0}^a f + \int_a^b f + \int_b^{x_0+p} f. \quad (6.10)$$

Voeren we in de laatste integraal de transformatie $x = y + p$ door, dan komt er

$$\int_b^{x_0+p} f(x) dx = \int_{b-p}^{x_0} f(y + p) dy = \int_a^{x_0} f(y) dy = - \int_{x_0}^a f.$$

Hierdoor herleidt (6.10) zich tot

$$\int_{x_0}^{x_0+p} f = \int_a^b f.$$

$\square$

Hoofdstuk 7

Elementaire functies en praktische integratie

In dit hoofdstuk leiden we de voornaamste eigenschappen van elementaire functies rigoureus af d.m.v. de theorie uit de vorige hoofdstukken. Om dit efficiënt te doen, wijken we dikwijls af van de historische (‘natuurlijke’) volgorde waarin de functies tot stand gekomen zijn.

Historisch gezien definieert men bijv. eerst a^x voor natuurlijke, dan voor gehele, dan voor rationale, en tenslotte voor reële x . Bij elke uitbreiding moet men dan nagaan dat de rekenregels geldig blijven. De logaritme verschijnt pas daarna wanneer we de inverse afbeelding van a^x bekijken. In de volgende paragraaf werken we omgekeerd, en vinden hierdoor met sprekend gemak de eigenschappen van a^b ($a, b \in \mathbb{R}$).

Analoog definiëren we eerst de boogsinus, en pas daarna de sinus, hoewel de historische volgorde omgekeerd is. Hierdoor kunnen we snel en rigoureus (zonder te steunen op ‘meetkundig evidente’ eigenschappen) de voornaamste eigenschappen van sinus aantonen.

In het onderdeel 7.3.6 zal blijken dat men, om alle rationale functies¹ te kunnen integreren, genoeg heeft aan het integreren van (a) veeltermen, (b) $\frac{1}{x}$ en (c) $\frac{1}{1+x^2}$. We besteden daarom bijzondere aandacht aan de integralen van $\frac{1}{x}$ en $\frac{1}{1+x^2}$.

7.1 De hyperbolische familie

7.1.1 De logaritme

De functie $f(t) = 1/t$ is continu over het open interval $J = \mathbb{R}^+$. Wegens 6.4.1 geldt voor elke $x > 0$ dat $\int_1^x \frac{dt}{t}$ bestaat en dat $\left(\int_1^x \frac{dt}{t}\right)' = \frac{1}{x}$. Vandaar

7.1.1 Definitie. De (natuurlijke) logaritme² $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd als

$$\ln x := \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (x > 0).$$

¹Een **rationale functie** is een quotiënt van twee veeltermfuncties.

²In het Latijn: *logarithmus naturalis*, vanwaar de notatie; *log-arithmos* betekent *verhoudings-getal*. Leibniz en Wallis schrijven de verwantschap uit onze definitie toe aan Gregorio a San Vicente, beter bekend als *Grégoire de Saint Vincent* (° Brugge 1584, † Gent 1667).

7.1.2 Stelling.

1. $\ln 1 = 0$.

2. $\ln$ is onbepaald afleidbaar over $\mathbb{R}^+$, met in het bijzonder

$$\ln' x = \frac{1}{x}.$$

3. $\ln$ is strikt stijgend over $\mathbb{R}^+$.

4. De vergelijking $\ln x = 1$ heeft juist één oplossing, genoteerd e , en $2,6 < e < 2,8$.

5. Voor alle $x > 0$, $y > 0$ is $\ln(xy) = \ln x + \ln y$; in het bijzonder is $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ voor alle $x > 0$.

6. Voor alle $x > 0$ geldt

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1.$$

7. We hebben

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = -\infty.$$

8. $\ln$ heeft als domein $\mathbb{R}^+$ en als waardenverzameling $\mathbb{R}$.

9. We hebben

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Bewijs. 1. $\int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$.

2. De formule is een toepassing van 6.4.1. De afgeleide functie $x \mapsto \frac{1}{x}$ is op haar beurt onbepaald afleidbaar over $\mathbb{R}^+$.

3. Wegens $\ln' x > 0$ voor alle $x > 0$.

4. We hebben

$$\begin{aligned} \ln 2,6 &= \int_1^{26/10} \frac{dt}{t} = \int_1^{11/10} \frac{dt}{t} + \int_{11/10}^{12/10} \frac{dt}{t} + \int_{12/10}^{13/10} \frac{dt}{t} + \cdots + \int_{25/10}^{26/10} \frac{dt}{t} \\ &< \frac{1/10}{1} + \frac{1/10}{11/10} + \frac{1/10}{12/10} + \cdots + \frac{1/10}{25/10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{25} = 0,98 \cdots < 1 \\ \ln 2,8 &= \int_1^{28/10} \frac{dt}{t} = \int_1^{16/15} \frac{dt}{t} + \int_{16/15}^{17/15} \frac{dt}{t} + \int_{17/15}^{18/15} \frac{dt}{t} + \cdots + \int_{41/15}^{42/15} \frac{dt}{t} \\ &> \frac{1/15}{16/15} + \frac{1/15}{17/15} + \frac{1/15}{18/15} + \cdots + \frac{1/15}{42/15} = \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{42} = 1,008 \cdots > 1. \end{aligned}$$

Omdat $\ln$ continu is, is ook 1 een functiewaarde, van een x tussen 2,6 en 2,8. Omdat $\ln$ strikt stijgend is, is deze x enig.

5. Voor $a > 0$ is

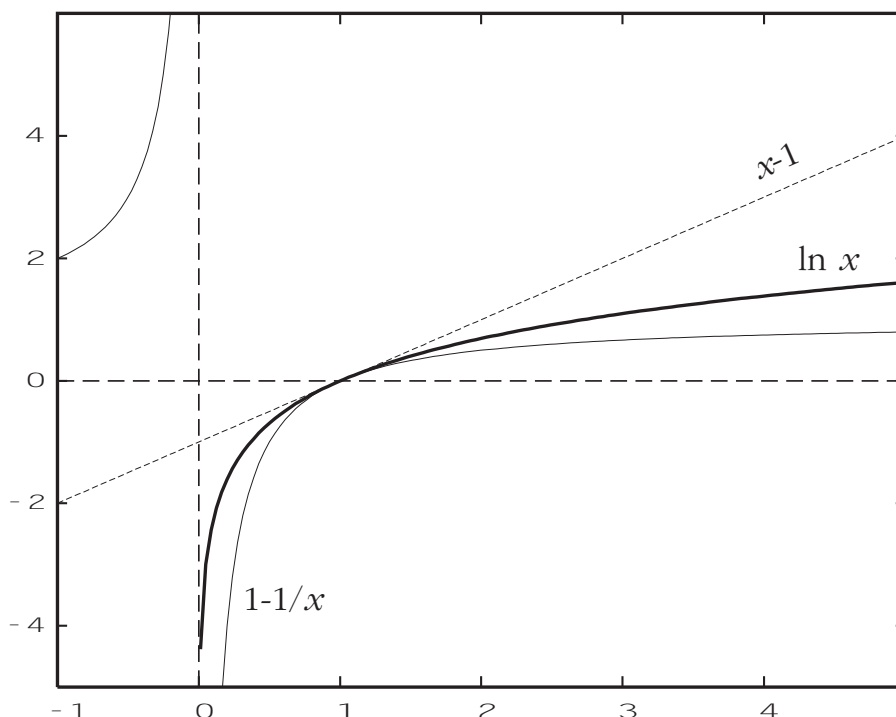
$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \stackrel{(u=at)}{=} \int_a^{ax} \frac{du}{u} = \ln(ax) - \ln a$$

m.a.w., $\ln(ax) = \ln a + \ln x$ voor elke $a > 0$, $x > 0$. Het bijzonder geval volgt uit de keuze $y = 1/x$.

6. Beschouw voor $x > 0$ de functie $g(x) := x - 1 - \ln x$. Uit het tekenonderzoek van $g'(x) = 1 - (1/x)$ blijkt dat g strikt stijgt in het interval $]1, +\infty[$ en strikt daalt in het interval $]0, 1[$, zodat een minimum bereikt wordt in $x = 1$. Vandaar $g(x) > g(1)$ voor alle $0 < x \neq 1$, d.w.z. $\ln x < x - 1$. Nemen we in het bijzonder $x = 1/y$ (y is dan eveneens een willekeurig positief getal verschillend van 1) dan vinden we $\ln(1/y) < (1/y) - 1$, dus $-\ln y < (1/y) - 1$ of nog $\ln y > 1 - (1/y)$. Door combinatie van beide ongelijkheden krijgen we

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1, \quad (x > 0, x \neq 1).$$

Voor $x = 1$ ontstaat de gelijkheid $0 = 0 = 0$.



Figuur 7.1: $\ln x$ tussen de hyperbool $1 - 1/x$ en de rechte $x - 1$.

7. Neem willekeurig $M \in \mathbb{R}$ en kies een natuurlijke $n > M$. Als dan $x > e^n$, hebben we

$$\ln x > \ln(e^n) = n \ln e = n > M,$$

d.w.z. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

Als $x \rightarrow 0+$, dan is $1/x \rightarrow +\infty$, zodat $-\ln x = \ln(1/x) \rightarrow +\infty$, en dus $\ln x \rightarrow -\infty$.

8. Uit de bovenstaande limieten volgt dat $\ln$ willekeurig grote en willekeurig kleine waarden bereikt. Door de tussenwaardstelling is dus elke willekeurige $y_0 \in \mathbb{R}$ een waarde van $\ln$.

9. Met de regel van de l'Hospital vinden we

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

□

7.1.3 Definitie. Het getal $e = 2,7182\dots$ noemt men het **grondtal van de natuurlijke logaritme**.

7.1.2 De exponentiële

De functie $\ln$, met domein $\mathbb{R}^+$ en waardenverzameling $\mathbb{R}$, is strikt stijgend en continu, met een afgeleide die nergens nul is. Bijgevolg (zie 4.2.16) heeft deze functie een inverse, die (zie 5.1.11) eveneens strikt stijgend, continu en afleidbaar is.

7.1.4 Definitie. De inverse van $\ln$ is de **exponentiële (functie)**, genoteerd $\exp$.

Zijn de eenheden op de x -as en de y -as dezelfde, dan ontstaat de beeldlijn van $\exp$ door de beeldlijn van $\ln$ rond de eerste bissectrice te spiegelen.

7.1.5 Stelling.

1. De verwantschap tussen $\ln$ en $\exp$ wordt gegeven door

$$\begin{cases} \exp(\ln x) = x & (x > 0) \\ \ln(\exp x) = x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

2. Is $x > 0$, dan is $\ln x$ het enige getal waarvan de exponentiële gelijk aan x is.

3. $\exp$ heeft domein $\mathbb{R}$ en waardenverzameling $\mathbb{R}^+$, is strikt stijgend en $\exp 0 = 1$.

4. $\exp$ is onbepaald afleidbaar over $\mathbb{R}$, met in het bijzonder $\exp' = \exp$.

5. Voor alle x, y is $\exp(x + y) = \exp x \exp y$; in het bijzonder is $\exp(-x) = 1/(\exp x)$ voor alle x .

6. We hebben de ongelijkheden

$$\begin{aligned} 1 + x &\leq \exp x & (x \in \mathbb{R}) \\ \exp x &\leq \frac{1}{1 - x} & (x < 1). \end{aligned}$$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$.

8. Voor een willekeurige veeltermfunctie $P(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{\exp x} = 0.$$

Bewijs. 1-2. Uit de definitie van $\exp$ als inverse van $\ln$.

3. Uit de definitie van $\exp$ als inverse van $\ln$ en 4.2.16.

4. Vermits $\exp$ de inverse van $\ln$ is volgt voor $c > 0$ (zie 5.1.11)

$$\exp'(\ln c) = \frac{1}{\ln' c} = c.$$

Stellen we $x = \ln c$ dan verkrijgen we $\exp' x = \exp x$. Na herhaald toepassen volgt $\exp^{(n)} = \exp$ voor $n = 1, 2, \dots$

5. We weten dat voor alle $\alpha > 0$ en $\beta > 0$

$$\ln(\alpha\beta) = \ln \alpha + \ln \beta.$$

Stellen we $\alpha = \exp x$ en $\beta = \exp y$, dan is $\ln \alpha = x$ en $\ln \beta = y$, zodat de bovenstaande formule zich herleidt tot

$$\ln(\exp x \exp y) = x + y.$$

Laten we hierop $\exp$ inwerken, dan krijgen we

$$\exp x \exp y = \exp(x + y).$$

Het bijzonder geval komt overeen met de keuze $y = -x$.

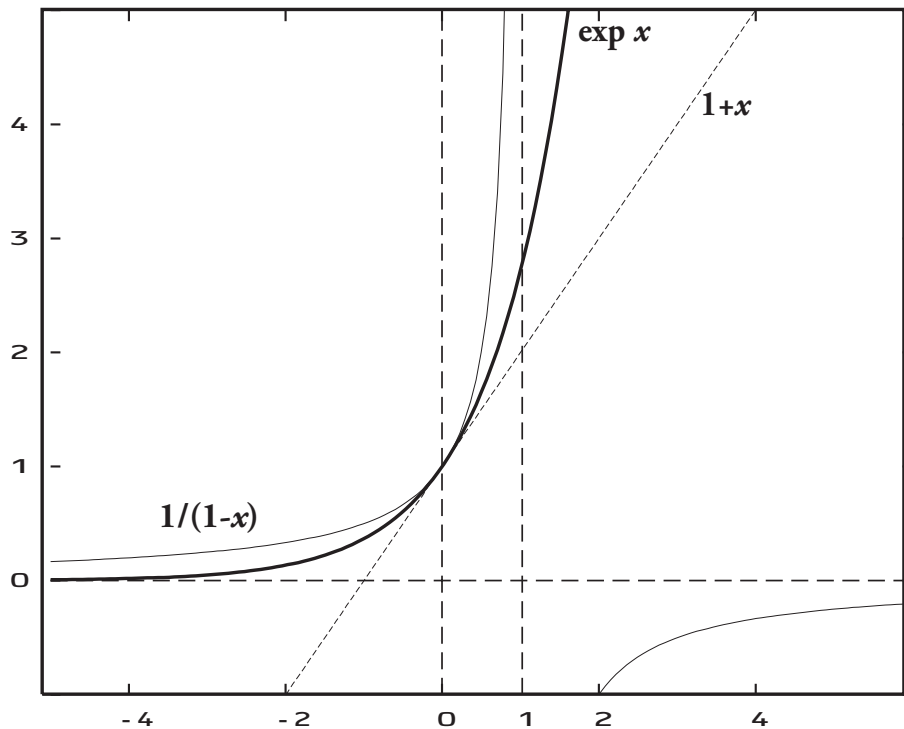
6. De gelijkheden voor $x = 0$ zijn triviaal. Neem dus $x \neq 0$. We steunen op de ongelijkheden

$$1 - \frac{1}{\alpha} < \ln \alpha < \alpha - 1 \quad (0 < \alpha \neq 1).$$

Stellen we $\alpha = \exp x$, dan is $\ln \alpha = x$, zodat de bovenstaande formules zich herleiden tot

$$1 - \frac{1}{\exp x} < x < \exp x - 1 \quad (x \neq 0).$$

De rechtse ongelijkheid leidt tot $\exp x > 1 + x$, en de linkse, mits $1 - x > 0$, tot $\exp x < \frac{1}{1-x}$.



Figuur 7.2: $\exp x$ tussen de rechte $x + 1$ en de hyperbool $1/(1 - x)$.

7. Volgt uit de ongelijkheden 6.

8. De beschouwde limiet is een onbepaaldheid van type ∞/∞ . Bij herhaald toepassen van de regel van de l'Hospital blijft de noemer onveranderd, terwijl de veelterm in de teller telkens van graad verlaagt. Uiteindelijk vindt men dus

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{\exp x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + b}{\exp x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\exp x} = 0.$$

□

7.1.3 Machtfuncties

7.1.6 Definitie. Voor $x > 0$ en $y \in \mathbb{R}$ definiëren we **x tot de macht y** als

$$x^y := \exp(y \ln x).$$

In x^y noemt men x het **grondtal** en y de **exponent**.

Nemen we in het bijzonder e als grondtal, dan zien we dat

$$e^y = \exp(y \ln e) = \exp y.$$

De eerder beschouwde exponentiële functie is dus niets anders dan de machtfunctie met e als grondtal. Voortaan zullen we dan ook meestal e^x schrijven i.p.v. $\exp x$. In deze notatie is dus

$$\boxed{x^y = e^{y \ln x}} \quad (7.1)$$

7.1.7 Stelling.

1. Voor $x > 0$ is $x^0 = 1$.
2. Voor $x > 0$ is $x^y x^z = x^{y+z}$.
3. Voor $x > 0$ is $x^{-y} = \frac{1}{x^y}$.
4. Voor $x > 0$ is $(x^y)^z = x^{yz}$.
5. Voor $x > 0, y > 0$ is $(xy)^z = x^z y^z$.

Bewijs. 1. $x^0 = \exp(0 \ln x) = \exp(0) = 1$.

2. $x^y x^z = \exp(y \ln x) \exp(z \ln x) = \exp((y+z) \ln x) = x^{y+z}$.

3. $x^{-y} x^y = x^{y-y} = x^0 = 1$.

4. $(x^y)^z = \exp(z \ln(\exp(y \ln x))) = \exp(zy \ln x) = x^{yz}$.

5. $(xy)^z = \exp(z \ln(xy)) = \exp(z(\ln x + \ln y)) = \exp(z \ln x) \exp(z \ln y) = x^z y^z$. □

Uit de definitie van x^y kunnen twee verschillende types van **machtfunctie** afgeleid worden: $x \mapsto a^x$ en $x \mapsto x^a$ (a constant). De eerste van die twee is, voor $a > 1$, enkel een variant van e^x en voor $0 < a < 1$ een variant van e^{-x} .

7.1.8 Stelling (Eigenschappen van a^x met $a > 1$). *Is $a > 1$, dan hebben we de volgende eigenschappen.*

1. a^x is onbepaald afleidbaar over $\mathbb{R}$, en $(a^x)' = a^x \ln a$ voor alle x .
2. a^x is strikt stijgend met $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.
3. Voor een willekeurige veeltermfunctie $P(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{a^x} = 0.$$

Bewijs. 1. Uit de kettingregel.

2. $(a^x)' = a^x \ln a > 0$ omdat $\ln a > 0$ wegens $a > 1$. Bijgevolg is a^x strikt stijgend over $\mathbb{R}$. Voorts is (als we $x \ln a = t$ stellen)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln a} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty \\ \text{en } \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln a} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0. \end{aligned}$$

3. De limiet is van het type $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Zoals eerder voor het geval $a = e$ volstaat het, herhaaldelijk de regel van de l'Hospital toe te passen. Het enige verschil is dat er nu, bij elke toepassing van de regel, in de noemer een factor $\ln a$ bijkomt. $\square$

7.1.9 Stelling (Eigenschappen van a^x met $0 < a < 1$). *Is $0 < a < 1$, dan hebben we de volgende eigenschappen.*

1. a^x is onbepaald afleidbaar over $\mathbb{R}$, en $(a^x)' = a^x \ln a$ voor alle x .
2. a^x is strikt dalend met $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$.

Bewijs. 1. Uit de kettingregel.

2. Is $0 < a < 1$, dan is $a^x = 1/(b^x)$ met $b := 1/a > 1$. We weten dat b^x strikt stijgt met $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = +\infty$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} b^x = 0$. Bijgevolg is a^x strikt dalend met $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$. $\square$

7.1.10 Opmerking. Voor $a = 1$ is $a^x = 1$ voor alle x .

Nu de machtfunctie van het tweede type, met veranderlijk grondtal en vaste exponent. De definitie van $x^a := e^{a \ln x}$ heeft enkel zin voor $x > 0$. Maar die beperking is overbodig als a een geheel getal is. Voor $a = n \in \mathbb{N}^+$ kunnen we x^n voor alle $x \in \mathbb{R}$ definiëren als het product van n factoren x , en voor $a = -n$ kunnen we x^{-n} voor alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiëren als $1/x^n$. Men gaat gemakkelijk na dat deze elementaire definities voor $x > 0$ samenvallen met wat de algemene definitie levert.

Voortaan laten we het elementaire geval $a \in \mathbb{Z}$ dus buiten beschouwing.

7.1.11 Stelling (Eigenschappen van x^a met $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$).

1. $x \mapsto x^a$ is onbepaald afleidbaar over $\mathbb{R}^+$, en $(x^a)' = ax^{a-1}$ voor alle $x > 0$.
2. Als $a > 0$, dan is $x \mapsto x^a$ strikt stijgend; is $a < 0$, dan is $x \mapsto x^a$ strikt dalend met $\lim_{x \rightarrow 0+} x^a = +\infty$.
3. Voor elke $a > 0$ is $\lim_{x \rightarrow 0+} x^a = 0$.

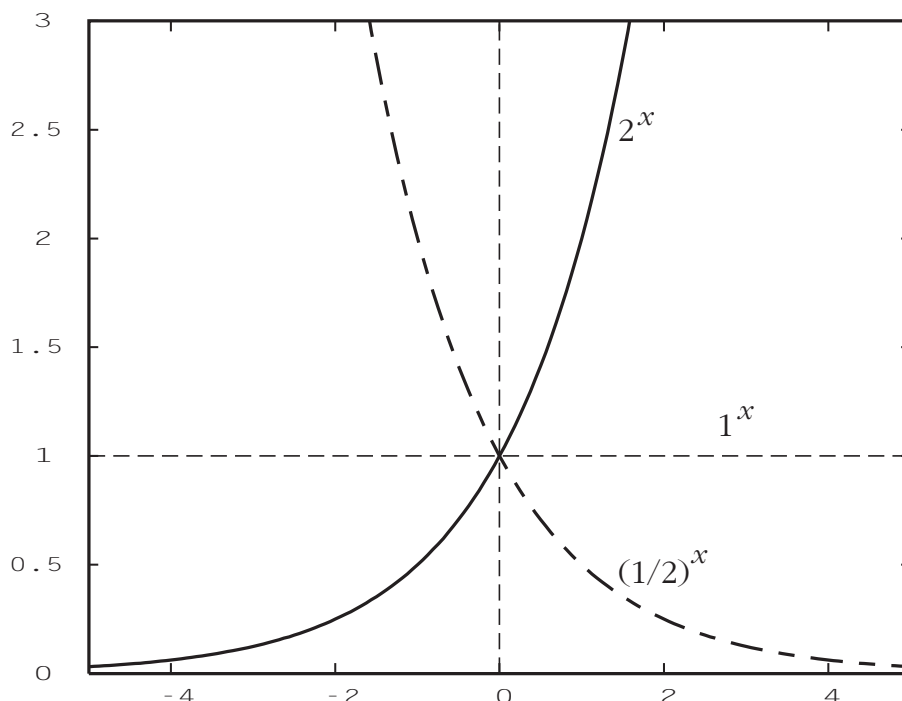
Bewijs. 1. Uit de kettingregel.

2. De afgeleide $(x^a)' = ax^{a-1} = ae^{(a-1) \ln x}$ is > 0 voor $a > 0$ en < 0 voor $a < 0$. Voor $a < 0$ is $\lim_{x \rightarrow 0+} a \ln x = +\infty$ en dus $\lim_{x \rightarrow 0+} x^a = +\infty$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0+} x^a = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{a \ln x} (= e^{-\infty}) = 0$. $\square$

De eigenschap 3. van de stelling rechtvaardigt de afspraak

$$0^a = 0 \quad (a > 0)$$



Figuur 7.3: Beeldlijnen van 1^x , $(1/2)^x$, 2^x .

7.1.12 Notatie. We noteren³

$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} a^{1/n} & (a > 0, n \in \mathbb{N}^+) \\ -(-a)^{1/n} & (a < 0, n \text{ oneven}), \end{cases}$$

met $\sqrt{a}$ i.p.v. $\sqrt[2]{a}$.

Dit betekent dat $\sqrt[n]{x}$ gedefinieerd is als hetzij $x > 0$, hetzij n oneven en $x < 0$. Men kan triviaal aanvullen met $\sqrt[n]{0} = 0$ voor alle natuurlijke $n > 0$.

7.1.13 Stelling.

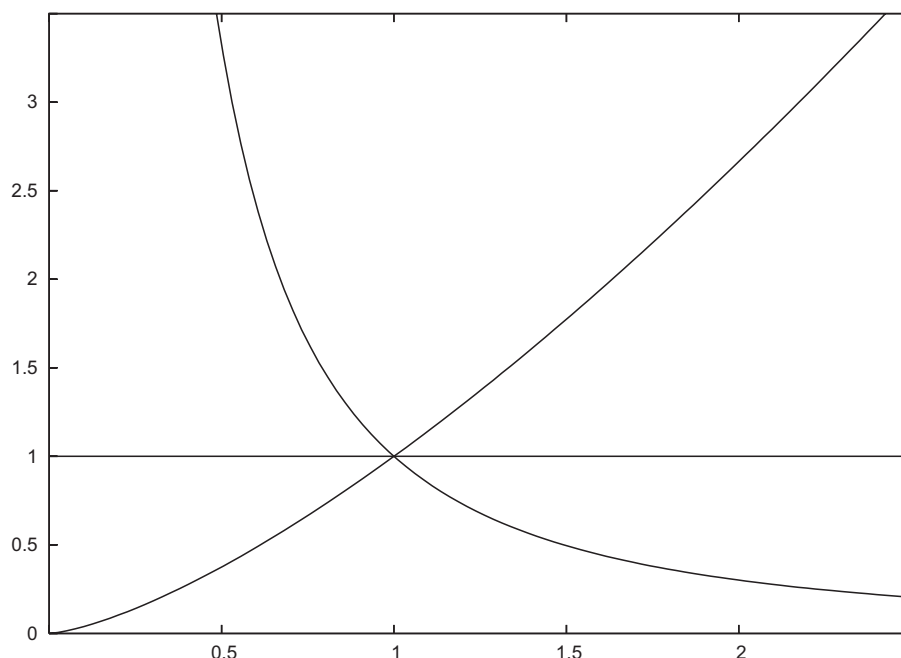
1. Is $a > 0$ en n een positief natuurlijk getal, dan is $\sqrt[n]{a}$ het enige positief(!!) getal waarvan de n -de macht gelijk aan a is.
2. Is $a < 0$ en n een oneven natuurlijk getal, dan is $\sqrt[n]{a}$ het enige getal waarvan de n -de macht gelijk aan a is.

Bewijs. 1. Bekijk de eenterm $P(x) = x^n$ in $\mathbb{R}$. Dan is $P(a^{1/n}) = (a^{1/n})^n = a^1 = a$. Over $\mathbb{R}^+$ is $P(x)$ strikt stijgend (afgeleide $nx^{n-1} > 0$ voor $x > 0$). Er kan dus in $\mathbb{R}^+$ geen ander getal bestaan dat door P eveneens op a afgebeeld wordt.

2. Dit keer is $P(-(-a)^{1/n}) = (-1)^n(-a) = a$ wegens n oneven. Tevens is $P(x)$ nu over heel $\mathbb{R}$ strikt stijgend (afgeleide $nx^{n-1} > 0$ voor alle x , ook voor $x < 0$ wegens $n-1$ even). Er kan dus geen ander getal bestaan dat door P eveneens op a afgebeeld wordt. $\square$

³Het teken $\sqrt{}$ is de hoekige 'r' van het Latijn *radix* (wortel). Deze van oorsprong Arabische benaming verwijst echt naar de wortel van een plant.

7.1.14 Opmerking. Is $a > 0$ en n een *even* natuurlijk getal, dan bestaat er ook een *negatief* getal waarvan de n -de macht gelijk aan a is, nl. $-a^{1/n}$.



Figuur 7.4: Beeldlijnen van $x^{\sqrt{2}}$ (stijgend), x^0 (constant), $x^{-\sqrt{3}}$ (dalend, met verticale asymptoot).

7.1.15 Voorbeeld. Over $]0, 1[$ is

$$f(x) = 1/\sqrt{x}$$

continu maar zeker niet integreerbaar, want f is in elke omgeving van 0 onbegrensd. Toch heeft f in $]0, 1[$ een primitieve, nl.

$$F(x) = 2\sqrt{x}$$

die een rechterlimiet $F(0+) = 0$ en een linkerlimiet $F(1-) = 2$ heeft. We hebben dus $\int_0^1 f = [F]_0^1 = 2$, maar de integraal is oneigenlijk.

7.1.16 Stelling (Euler, 1743). Voor elke reële x is

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t = e^x$$

Bewijs. Neem willekeurig $x \in \mathbb{R}$ vast. Als $t \rightarrow +\infty$ zal het grondtal $1 + \frac{x}{t} \rightarrow 1$, zodat $1 + \frac{x}{t} > 0 = 1 - \varepsilon$ voor t voldoende groot.

Met de regel van de l'Hospital berekenen we vooreerst

$$\lim_{u \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+ux)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{x}{1+ux} = x.$$

Door de continuïteit van exp volgt dan

$$e^x = \lim_{u \rightarrow 0+} e^{\ln(1+ux)/u} \stackrel{u=1/t}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t \ln(1+x/t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t.$$

□

I.h.b. is dus

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

7.1.4 De hyperbolische functies

Bepaalde combinaties van exponentiëlen komen vaak genoeg voor om ze als afzonderlijke functies te aanzien.

7.1.17 Definitie. De **hyperbolische functies** zijn de **hyperbolische sinus** (ook: **sinus hyperbolicus**), de **hyperbolische cosinus** (ook: **cosinus hyperbolicus**) en de **hyperbolische tangens** (ook: **tangens hyperbolicus**), gedefinieerd als

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

(Andere notaties zijn sh, ch, th, sinhyp, coshyp, tanhyp.) De eigenschappen van de hyperbolische functies zijn uiteraard onmiddellijke gevolgen van de eigenschappen van de exponentiële functie. Wij groeperen hieronder de belangrijkste eigenschappen.

7.1.18 Stelling.

1. Voor alle $x \in \mathbb{R}$ is $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

2. Voor alle x en y is

$$\begin{aligned} \sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y. \end{aligned}$$

3. De drie hyperbolische functies zijn over $\mathbb{R}$ onbepaald afleidbaar, met in het bijzonder

$$\sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh, \quad \tanh' = \frac{1}{\cosh^2}.$$

4. $\sinh$ is oneven, heeft als domein en waardenverzameling geheel $\mathbb{R}$, is strikt stijgend en heeft $\sinh 0 = 0$.

5. $\cosh$ is even, heeft als domein geheel $\mathbb{R}$, als waardenverzameling $[1, +\infty[$, is strikt dalend in $] -\infty, 0[$, strikt stijgend in $] 0, +\infty[$, en heeft $\cosh 0 = 1$.

6. $\tanh$ is oneven, heeft als domein geheel $\mathbb{R}$, als waardenverzameling $] -1, 1[$, is strikt stijgend, en heeft

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1, \quad \tanh 0 = 0.$$

Bewijs. 1. Uit de definitie.

2.

$$\begin{aligned} \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \sinh(x + y) \end{aligned}$$

en analoog voor de andere formules.

3. Uit

$$\begin{aligned}\sinh' x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \\ \cosh' x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \\ \tanh' x &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.\end{aligned}$$

4. $\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh x$, zodat $\sinh$ oneven is. De definitieverzameling is $\mathbb{R}$ omdat e^x en e^{-x} bestaan voor elke reële x . Omdat

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty - 0 \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 - \infty$$

bereikt $\sinh$ elk reëel getal x . Het strikt stijgend karakter volgt uit $\sinh' x = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$, en $\sinh 0 = (1 - 1)/2 = 0$.

5. $\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$, zodat $\cosh$ even is. De definitieverzameling is $\mathbb{R}$ omdat e^x en e^{-x} bestaan voor elke reële x . Wegens $\cosh' x = \sinh x$ is $\cosh$ strikt stijgend voor $x > 0$ en strikt dalend voor $x < 0$, met $\cosh 0 = 1$. Verder is $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty$ (en uiteraard $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = +\infty$), zodat de waardenverzameling $[1, +\infty[$ is.

6. $\tanh(-x) = \sinh(-x)/\cosh(-x) = -\sinh x/\cosh x = -\tanh x$, zodat $\tanh$ oneven is. De definitieverzameling is $\mathbb{R}$ omdat $\sinh x$ en $\cosh x \neq 0$ bestaan voor elke reële x . Omdat $\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0$, is $\tanh$ strikt stijgend over $\mathbb{R}$, en $\tanh 0 = 0$. Verder is

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

en, omdat de functie oneven is,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1.$$

Omdat $\tanh$ bovendien strikt stijgend is, impliceert dit dat de waardenverzameling van $\tanh$ een deel is van $] -1, 1[$. Wegens de tussenwaardestelling worden alle waarden tussen -1 en $+1$ bereikt. $\square$

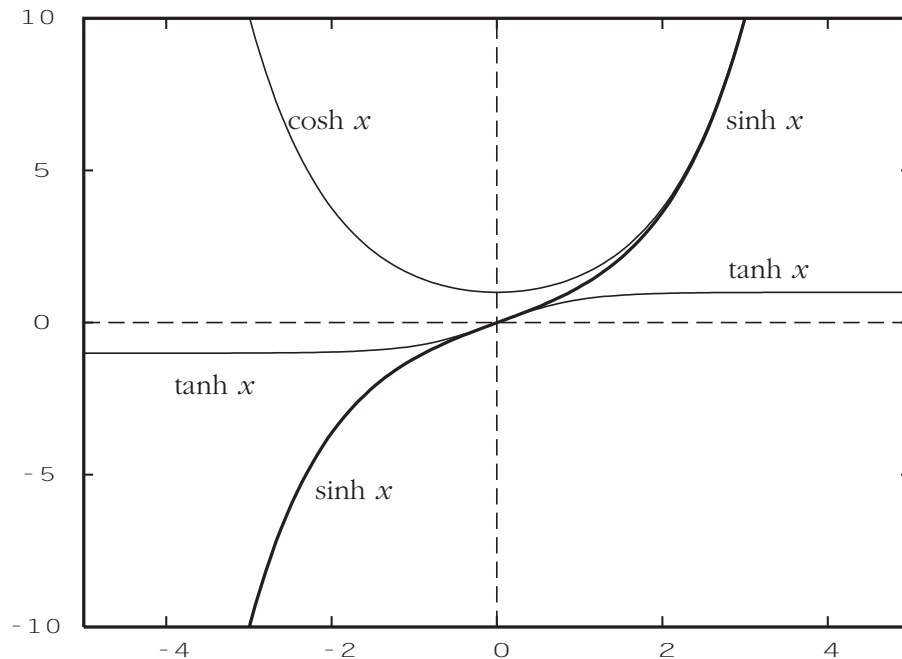
7.1.5 De inverse hyperbolische functies

De hyperbolische sinus, met domein en waardenverzameling $\mathbb{R}$, is strikt stijgend en continu, en heeft dus een inverse met dezelfde eigenschappen.

7.1.19 Definitie. De inverse functie van $\sinh$ noemt men **argument sinus hyperbolicus**, en wij noteren hiervoor $\operatorname{argsinh}$.

(Andere notaties: asinh , $\operatorname{arcsinh}$, argsh .) De beeldlijn van $\operatorname{argsinh}$ ontstaat door de beeldlijn van $\sinh$ te spiegelen om de eerste bissectrice.

7.1.20 Stelling.



Figuur 7.5: De drie hyperbolische functies.

1. De verwantschap tussen $\sinh$ en $\operatorname{argsinh}$ wordt gegeven door

$$\begin{cases} \sinh(\operatorname{argsinh} x) &= x & (x \in \mathbb{R}) \\ \operatorname{argsinh}(\sinh x) &= x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

2. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ is $\operatorname{argsinh} x$ het enige getal⁴ waarvan de hyperbolische sinus gelijk aan x is.

3. $\operatorname{argsinh}$ heeft domein en waardenverzameling $\mathbb{R}$, is strikt stijgend en heeft $\operatorname{argsinh} 0 = 0$.

4. Voor alle reële x is

$$\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

5. Voor alle reële x is

$$\operatorname{argsinh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Bewijs. 1-3. Uit de definitie van $\operatorname{argsinh}$ als inverse.

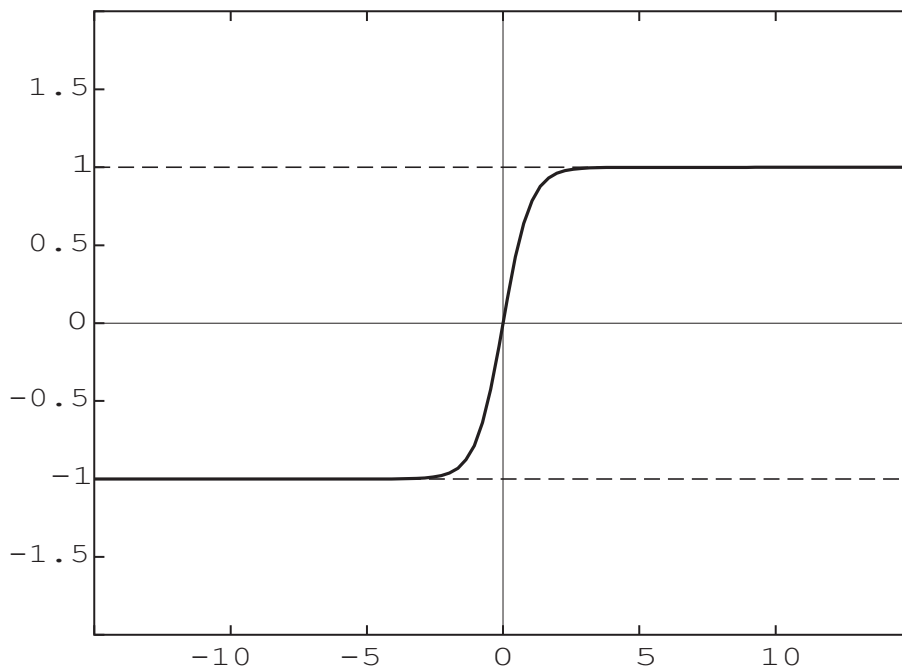
4. Neem een vaste $x \in \mathbb{R}$. Stellen we $y := \operatorname{argsinh} x$, dan is $\sinh y = x$, d.w.z. $e^y - e^{-y} = 2x$. Dit is gelijkwaardig met de vierkantsvergelijking $e^{2y} - 1 = 2xe^y$, waaruit ondubbelzinnig

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}.$$

(Het negatieve getal $x - \sqrt{x^2 + 1}$ kan natuurlijk niet $e^y > 0$ zijn.) Zo komen we tot

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

⁴of *argument*, zoals men de veranderlijke in een functievoorschrift $f(x)$ ook wel noemt



Figuur 7.6: De hyperbolische tangens met asymptoten $y = \pm 1$.

5. Uit $\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ leiden we af dat

$$\operatorname{argsinh}' x = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

□

De hyperbolische cosinus is strikt stijgend over het interval $[0, +\infty[$. Noteren we tijdelijk

$$\operatorname{Cosh} := \cosh / [0, +\infty[,$$

dan is Cosh , met domein $[0, +\infty[$ en waardenverzameling $[1, +\infty[$, strikt stijgend en continu, met een afgeleide $\operatorname{Cosh}' x = \sinh x$ die voor geen enkele $x > 0$ nul is.

Bijgevolg heeft Cosh een inverse met dezelfde eigenschappen (strikt stijgend, continu, afleidbaar voor $x > \operatorname{Cosh} 0 = 1$), waarvan de beeldlijn ontstaat door de beeldlijn van Cosh rond de eerste bissectrice te spiegelen.

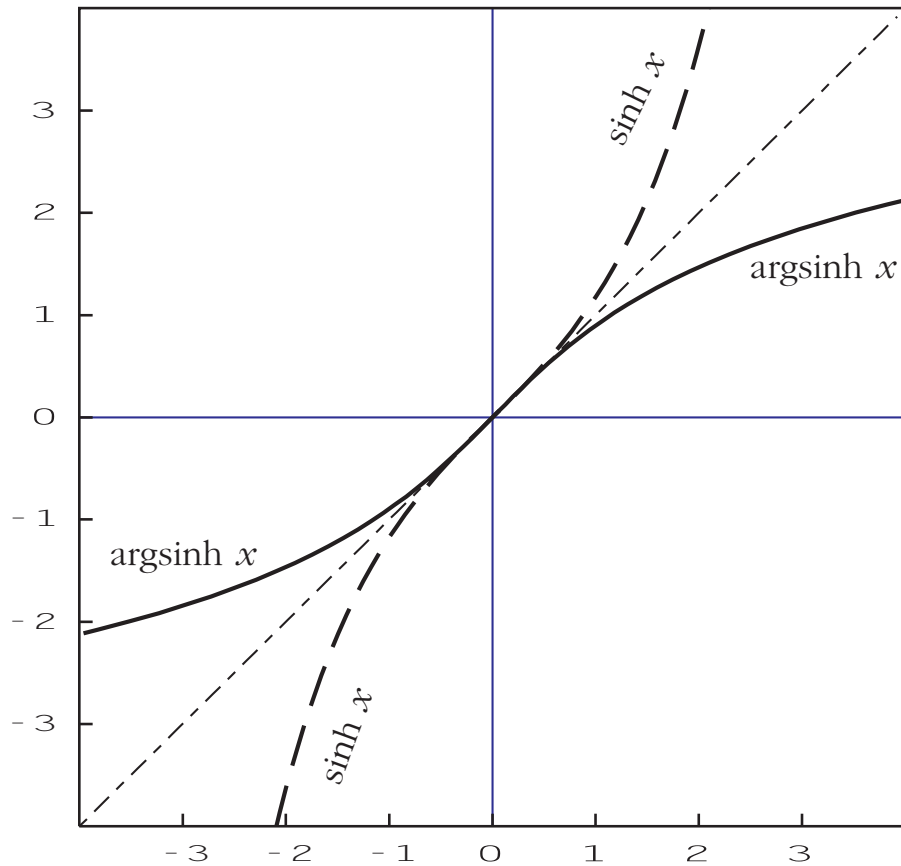
7.1.21 Definitie. De inverse

$$\operatorname{argcosh} := (\operatorname{Cosh})^{-1} : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[= \operatorname{argcosh}([1, +\infty[)$$

noemen we **argument cosinus hyperbolicus**.

(Andere notaties: acosh , $\operatorname{arccosh}$, argch .)

7.1.22 Stelling.



Figuur 7.7: arsinh als inverse van $\sinh$.

1. De verwantschap tussen $\cosh$ en $\operatorname{argcosh}$ wordt gegeven door

$$\begin{cases} \cosh(\operatorname{argcosh} x) = x & (x \geq 1) \\ \operatorname{argcosh}(\cosh x) = x & (x \geq 0) \end{cases}$$

2. $\operatorname{argcosh}$ heeft als domein $[1, +\infty[$, als waardenverzameling $[0, +\infty[$, is strikt stijgend en heeft $\operatorname{argcosh} 1 = 0$.
3. Voor elke $x \geq 1$ is $\operatorname{argcosh} x$ het enige nietnegatieve(!) getal waarvan de hyperbolische cosinus gelijk aan x is.
4. Voor alle $x \geq 1$ is

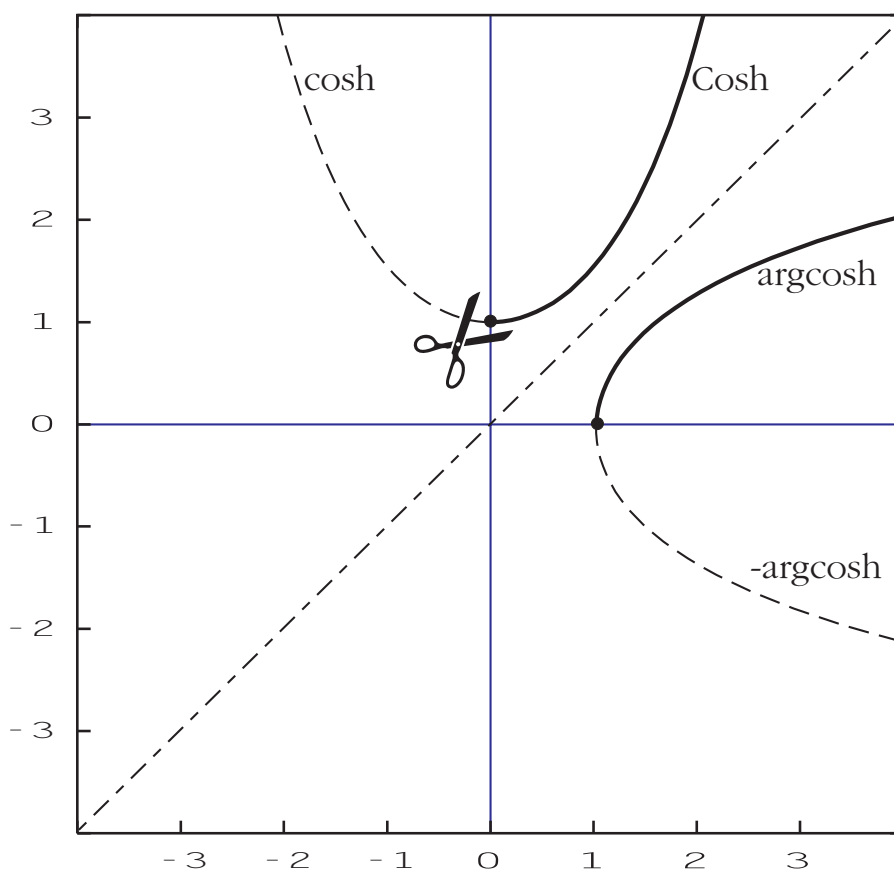
$$\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

5. Voor alle $x > 1$ is

$$\operatorname{argcosh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Bewijs. 1. Omdat $\operatorname{argcosh}$ en $\cosh$ elkaars inverse zijn hebben we

$$\begin{cases} \cosh(\operatorname{argcosh} x) = x & \text{voor alle } x \in \mathcal{D}_{\operatorname{argcosh}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} \\ \operatorname{argcosh}(\cosh x) = x & \text{voor alle } x \in \mathcal{D}_{\cosh} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}. \end{cases}$$



Figuur 7.8: $\operatorname{argcosh}$ als inverse van $\operatorname{Cosh} := \cosh / [0, +\infty[$.

Wat functiewaarden betreft is $\operatorname{Cosh} = \cosh$ (want enkel de *domeinen* verschillen), zodat het te bewijzen volgt.

2. Uit de definitie van $\operatorname{argcosh}$ als inverse.

3. Het getal $\operatorname{argcosh} x$ voldoet aan de vereisten: $\operatorname{argcosh} x \geq 0$ en $\cosh(\operatorname{argcosh} x) = x$. Het is het enige getal met die eigenschappen want $\cosh$ is strikt stijgend over $[0, +\infty[$.

4. Neem een vaste $x \in [1, +\infty[$. Stellen we $y = \operatorname{argcosh} x$, dan is $\cosh y = x$, d.w.z. $e^y + e^{-y} = 2x$. Dit is gelijkwaardig met de vierkantsvergelijking $e^{2y} + 1 = 2xe^y$, waaruit men twee oplossingen haalt die (het product van de wortels is immers 1) elkaars omgekeerde zijn:

$$e^y = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1 & \text{want } x \geq 1 \\ x - \sqrt{x^2 - 1} \leq 1. \end{cases}$$

Nu is $y = \operatorname{argcosh} x \geq 0$, dus $e^y \geq 1$. Zo vinden we ondubbelzinnig dat

$$e^y = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

waaruit

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

5. Uit $\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ leiden we, voor $x > 1$, af dat

$$\operatorname{argcosh}' x = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

□

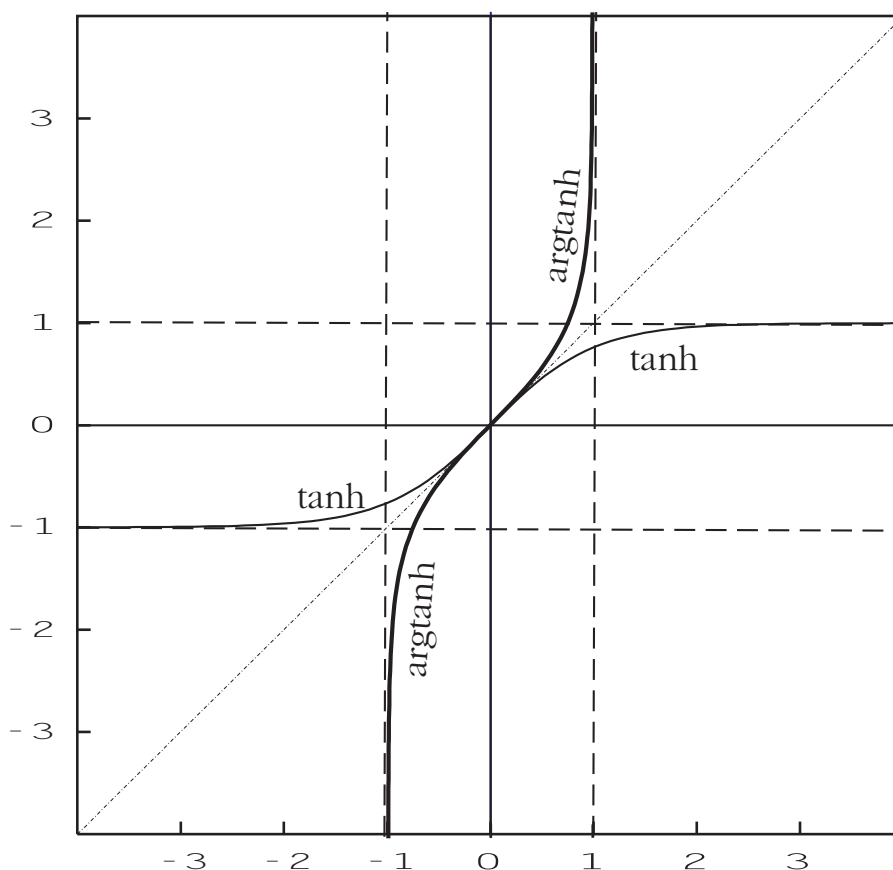
7.1.23 Opmerkingen.

1. Voor $x > 1$ bestaat er ook een *negatief* getal met een cosh gelijk aan x , namelijk $-\operatorname{argcosh} x$.
2. $\operatorname{argcosh}$ is niet afleidbaar in het punt $x = 1$. De raaklijn aan de beeldlijn is daar evenwijdig met de y -as.

De hyperbolische tangens, met domein $\mathbb{R}$ en waardenverzameling $] -1, 1[$, is strikt stijgend en continu, en heeft dus een inverse met dezelfde eigenschappen.

7.1.24 Definitie. De inverse functie van $\tanh$ noemt men **argument tangens hyperbolicus**, en wij noteren hiervoor $\operatorname{argtanh}$.

De beeldlijn van $\operatorname{argtanh}$ ontstaat door de beeldlijn van $\tanh$ te spiegelen om de eerste bissectrice.



Figuur 7.9: $\operatorname{argtanh}$ als inverse van $\tanh$, met verticale asymptoten bij $x = \pm 1$.

7.1.25 Stelling.

1. De verwantschap tussen $\tanh$ en $\operatorname{argtanh}$ wordt gegeven door

$$\begin{cases} \tanh(\operatorname{argtanh} x) = x & (-1 < x < 1) \\ \operatorname{argtanh}(\tanh x) = x & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

2. $\operatorname{argtanh}$ heeft als domein het interval $] -1, 1[$, als waardenverzameling $\mathbb{R}$, is strikt stijgend en heeft $\operatorname{argtanh} 0 = 0$.

3. Voor elke $x \in] -1, 1[$ is $\operatorname{argtanh} x$ het enige reëel getal waarvan de hyperbolische tangens gelijk aan x is.

4. Voor alle $x \in] -1, 1[$ is

$$\operatorname{argtanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

5. Voor alle $x \in] -1, 1[$ is

$$\operatorname{argtanh}' x = \frac{1}{1-x^2}.$$

Bewijs. 1-3. Uit de definitie van $\operatorname{argtanh}$ als inverse.

4. Neem een vaste $x \in] -1, 1[$. Stellen we $y = \operatorname{argtanh} x$, dan is $\tanh y = x$, d.w.z. $\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = x$. Dit is gelijkwaardig met de vergelijking $e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$, waaruit

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

5. Uit $\operatorname{argtanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ leiden we af dat

$$\operatorname{argtanh}' x = \frac{1}{2} \frac{1-x}{1+x} \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

□

Uit de opgestelde formules blijkt dat de inverse hyperbolische functies niet echt nieuwe transcendente functies zijn, maar combinaties van de logaritme, de vierkantswortel (die zelf een bijzondere machtfunctie is) en de elementaire veldbewerkingen $(+, -, \cdot, /)$.

7.2 De goniometrische familie

Man muss immer umkehren.

CARL JACOBI, 1804–1851

7.2.1 arcussinus

De functie $f(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$ is continu over het open interval $J =] -1, 1[$. Wegens 6.4.1 geldt voor elke $x \in] -1, 1[$ dat $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ bestaat en dat $\left(\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Verder is

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \leq \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = [-2\sqrt{1-t}]_0^x \leq 2, \quad \forall x \in [0, 1[$$

zodat de oneigenlijke integraal

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \leq 2$$

bestaat wegens 4.2.11. Vandaar

7.2.1 Definitie. De **arcussinus** (of **boogsinus**) wordt gedefinieerd door

$$\arcsin x := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad (x \in [-1, 1])$$

(Andere notaties: asin, Bgsin, bgsin.)

7.2.2 Definitie.

$$\pi := 2 \arcsin 1$$

De rol die e speelt voor de hyperbolische functiefamilie wordt voor de goniometrische familie overgenomen door π . Via boven- en ondersommen kan men opnieuw numerieke benaderingen voor $\pi (= 3,141592\dots)$ afleiden.

7.2.3 Opmerking. In Wiskundige Analyse II zullen we zien dat $\arcsin y_0$ ($0 \leq y_0 \leq 1$) haar gebruikelijke goniometrische betekenis heeft als de booglengte van de cirkelboog $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$, $0 \leq y \leq y_0$. I.h.b. is $\pi/2$ de booglengte van een kwartcirkel met straal 1.

7.2.4 Stelling.

1. $\arcsin 0 = 0$.
2. $\arcsin$ is oneven, m.a.w. voor alle $-1 \leq x \leq 1$ is $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.
3. voor alle $-1 < x < 1$ is

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. $\arcsin$ is continu op heel $[-1, 1]$.
5. $\arcsin$ is strikt stijgend op heel $[-1, 1]$.
6. $\arcsin$ heeft als waardenverzameling $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Bewijs. 1. $\int_0^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0$.

2. Uit

$$\arcsin(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \stackrel{t=-u}{=} \int_0^x \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} = -\arcsin x.$$

3. Wegens 6.4.1.

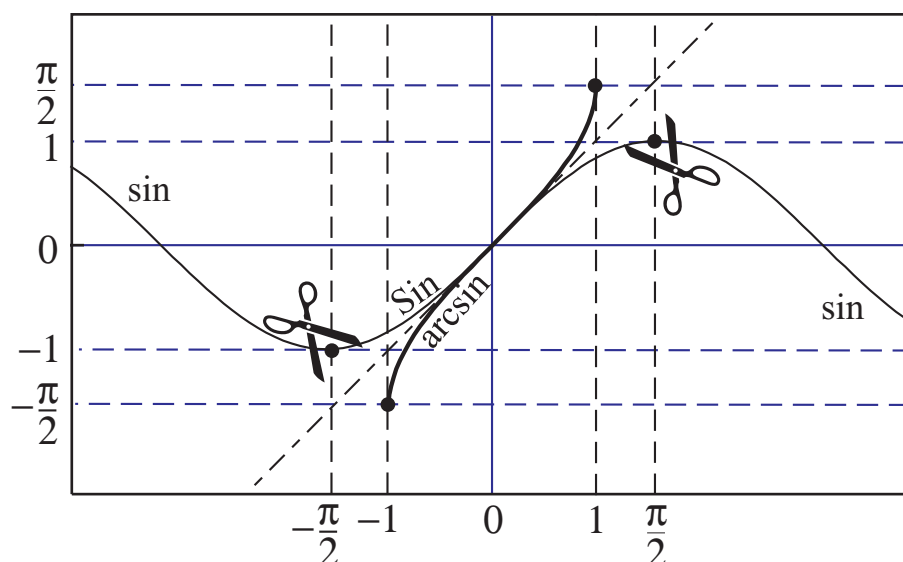
4. Omdat $\arcsin$ afleidbaar is in $] -1, 1[$, is $\arcsin$ ook continu op $] -1, 1[$. Door de definitie van oneigenlijke integraal is $\lim_{x \rightarrow 1} \arcsin x = \arcsin 1$, zodat $\arcsin x$ ook continu is in $x = 1$. Analoog in $x = -1$.

5. Wegens $\arcsin' x > 0$ voor alle $x \in] -1, 1[$ is $\arcsin$ strikt stijgend op $] -1, 1[$. Omdat $\arcsin$ continu is op $[-1, 1]$ is ook $\arcsin 1 > \arcsin x$ en $\arcsin -1 < \arcsin x$ voor alle $-1 < x < 1$.

6. Omdat $\arcsin$ stijgend is, is $-\pi/2 = -\arcsin 1 = \arcsin(-1) \leq \arcsin x \leq \arcsin 1 = \pi/2$ voor elke $x \in [-1, 1]$. Door de tussenwaardstelling is elk getal $y_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$ een waarde van $\arcsin$. $\square$

In deze context noemt men het interval $[0, \pi/2]$ vaak het **eerste kwadrant**, het interval $[\pi/2, \pi]$ het **tweede kwadrant**, het interval $[\pi, 3\pi/2]$ het **derde kwadrant**, het interval $[3\pi/2, 2\pi]$ het **vierde kwadrant**.

7.2.2 De goniometrische functies



Figuur 7.10: arcsin met inverse Sin.

Vermits arcsin, met domein $[-1, 1]$ en waardenverzameling $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, strikt stijgend en continu is, heeft hij een inverse, eveneens strikt stijgend en continu, die we tijdelijk als

$$\text{Sin} := (\arcsin)^{-1} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1] = \text{Sin}([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$$

noteren. Haar beeldlijn ontstaat door de beeldlijn van arcsin rond de eerste bissectrice te spiegelen.

7.2.5 Definitie. De **sinus**⁵ wordt gedefinieerd als een voortzetting van Sin: we stellen

$$\begin{aligned} \sin x &:= \arcsin^{-1} x, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin(x + k\pi) &:= (-1)^k \sin x, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zo is de functie sin, door haar definitie, *periodiek met periode 2π* , en gedefinieerd op heel $\mathbb{R}$.

7.2.6 Stelling.

1. De verwantschap tussen sin en arcsin wordt gegeven door

$$\begin{cases} \sin(\arcsin x) &= x & (-1 \leq x \leq 1) \\ \arcsin(\sin x) &= x & (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

⁵Latijn voor *boezem*. Deze fraaie benaming danken we aan een verkeerde Arabische vertaling van het Sanskriet voor *halve koorde*, wat de oorspronkelijke betekenis was.

2. Voor elke $x \in [-1, 1]$ is $\arcsin x$ het enige getal uit $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (!!) waarvan de sinus gelijk aan x is.

3. $\sin$ is afleidbaar op heel $\mathbb{R}$ met $\sin' x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, voor $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Bewijs. 1. Zoals in Stelling 7.1.22.1.

2. Uit de definitie van $\sin$ als inverse van $\arcsin$.

3. Omdat $\arcsin$ afleidbaar is op $] -1, 1[$ met $\arcsin' x \neq 0$, is $\sin$ afleidbaar op $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ en is

$$\sin'(\arcsin c) = \frac{1}{\arcsin' c} = \sqrt{1 - c^2} \quad (-1 < c < 1)$$

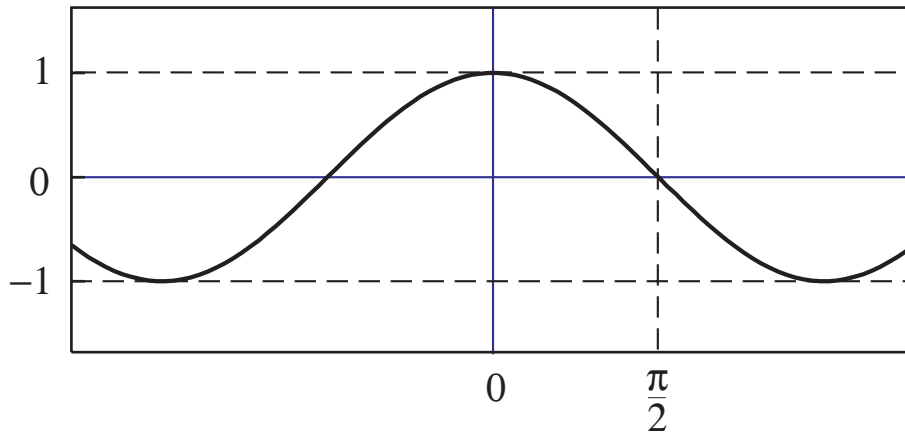
wegens stelling 5.1.11. Schrijven we $x = \arcsin c$, dan volgt $\sin' x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, voor $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Omdat $\sin$ continu is op $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, is dan

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} \left(= \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \sin' x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \sqrt{1 - \sin^2 x} = 0.$$

Analoog is $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+} \frac{\sin x + 1}{x + \frac{\pi}{2}} = 0$, en door $\sin(x + \pi) = -\sin x$ dus ook $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = 0$, waaruit $\sin'(\frac{\pi}{2}) = 0$. Door $\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x$ is $\sin$ dan ook afleidbaar op heel $\mathbb{R}$ met $\sin'(-\frac{\pi}{2}) = 0$. $\square$

7.2.7 Definitie. De **cosinus** wordt gedefinieerd als de afgeleide van de sinus:

$$\cos x := \sin' x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Figuur 7.11: Beeldlijn van $\cos$.

7.2.8 Stelling.

1. $\sin$ en $\cos$ zijn over heel $\mathbb{R}$ gedefinieerd en periodiek met periode 2π .
2. Voor alle $x \in \mathbb{R}$ is $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
3. Voor alle $x \in \mathbb{R}$ is $-1 \leq \sin x \leq 1$ en $-1 \leq \cos x \leq 1$.

4. $\sin$ en $\cos$ zijn onbepaald afleidbaar over $\mathbb{R}$, met $\sin' = \cos$ en $\cos' = -\sin$.

5. $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$.

6. $\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos \pi = -1$, $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$.

7. Voor alle $x \in \mathbb{R}$ is $\sin(-x) = -\sin x$ en $\cos(-x) = \cos x$.

8. Voor alle x en y geldt

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

9. Voor alle x en y geldt

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

10. $\sin$ is strikt stijgend in het interval $0 < x < \pi/2$; strikt dalend in het interval $\pi/2 < x < 3\pi/2$, strikt stijgend in het interval $3\pi/2 < x < 2\pi$.

11. $\cos$ is strikt dalend in het interval $0 < x < \pi$ en strikt stijgend in het interval $\pi < x < 2\pi$.

12. $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bewijs. 1. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ is $\cos(x + k\pi) = (\sin(x + k\pi))' = (-1)^k \sin' x = (-1)^k \cos x$, zodat ook $\cos$ periodiek is met periode 2π .

2. Omdat $\cos x = \sin' x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ voor $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ volgt het gevraagde op $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Door $\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x$ en $\cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x$ geldt dit ook op heel $\mathbb{R}$.

3. Uit 2.

4. Als $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, dan is

$$\cos' x = (\sqrt{1 - \sin^2 x})' = -\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = -\sin x.$$

Door de voortzetting geldt dit ook voor elke $x \in \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1)\frac{\pi}{2}$. Is $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ (zekere $k \in \mathbb{Z}$), dan volgt eveneens dat

$$\begin{aligned} \cos'(2k + 1)\frac{\pi}{2} &= \lim_{x \rightarrow (2k+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \cos(2k + 1)\frac{\pi}{2}}{x - (2k + 1)\frac{\pi}{2}} \left(= \frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow (2k+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\cos' x}{1} = - \lim_{x \rightarrow (2k+1)\frac{\pi}{2}} \sin x = -\sin(2k + 1)\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

vermits $\sin$ continu is.

5. Wegens $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ en $\sin(x + \pi) = -\sin x$.

6. Uit $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ op $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ volgt $\cos(\pm \frac{\pi}{2}) = 0$ en $\cos 0 = 1$. Wegens $\cos(x + \pi) = -\cos x$ volgen ook de andere hoofdwwaarden.

7. Omdat $\arcsin$ oneven is, is ook $\sin$ oneven. Voor $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ is verder

$$\sin(-(x + k\pi)) = \sin(-x - k\pi) = (-1)^k \sin(-x) = -(-1)^k \sin x = -\sin(x + k\pi).$$

Door afleiden van de identiteit $\sin(-x) = -\sin x$ volgt $\cos(-x) = \cos x$ op heel $\mathbb{R}$.

8. We moeten beide formules *gelijktijdig* bewijzen. Neem een vaste $a \in \mathbb{R}$ en definieer de afbeelding

$$f(x) := (\sin(x+a) - \sin x \cos a - \cos x \sin a)^2 + (\cos(x+a) - \cos x \cos a + \sin x \sin a)^2.$$

Hiervoor vinden we door de kettingregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\sin(x+a) - \sin x \cos a - \cos x \sin a)(\cos(x+a) - \cos x \cos a + \sin x \sin a) \\ &\quad + 2(\cos(x+a) - \cos x \cos a + \sin x \sin a)(-\sin(x+a) + \sin x \cos a + \cos x \sin a) = 0. \end{aligned}$$

Bijgevolg is f constant over $\mathbb{R}$. Invullen van $x = 0$ leert dat die constante nul is, m.a.w.

$$(\sin(x+a) - \sin x \cos a - \cos x \sin a)^2 + (\cos(x+a) - \cos x \cos a + \sin x \sin a)^2 = 0$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$. Bijgevolg ook

$$\sin(x+a) - \sin x \cos a - \cos x \sin a = \cos(x+a) - \cos x \cos a + \sin x \sin a = 0$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$.

9. Uit 8., door $-y$ te gebruiken i.p.v. y .

10. Omdat $\sin' x = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} > 0$ op $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$, is $\sin$ strikt stijgend op dit interval. Wegens $\sin(x+\pi) = -\sin x$ is $\sin$ dan strikt dalend op $] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} [$, enz.

11. Omdat $\sin 0 = 0$ en $\sin$ strikt stijgend is op $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$, is $\sin x > 0$ op $] 0, \frac{\pi}{2} [$, zodat $\cos' x < 0$ op dit interval en $\sin x < 0$ op $] -\frac{\pi}{2}, 0 [$, zodat $\cos' x > 0$ op dit interval. Wegens $\cos(x+\pi) = -\cos x$ volgt het gedrag op de andere intervallen.

12. Uit 8. volgt dat $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$. De keuze $x = \frac{\pi}{4}$ levert $0 = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{4}$, waaruit (wegens $\sin \frac{\pi}{4} \geq 0$) $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Wegens $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ is ook $\cos^2 \frac{\pi}{4} = 1$, waaruit (wegens $\cos \frac{\pi}{4} \geq 0$) $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\square$

7.2.9 Definitie. De **tangens** wordt gedefinieerd d.m.v.

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1)\frac{\pi}{2}.$$

7.2.10 Stelling.

1. $\tan$ heeft als domein $\mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1)\frac{\pi}{2}$, als waardenverzameling $\mathbb{R}$, is oneven, en

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-\pi/2)^+} \tan x = -\infty.$$

2. $\tan$ is periodiek met periode π , $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ en $\tan \frac{3\pi}{4} = -1$.

3. $\tan$ is strikt stijgend op elk interval $] (2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} [$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Is x geen oneven veelvoud van $\pm\pi/2$, dan is $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

4. $\tan x > x$ voor alle $x \in] 0, \frac{\pi}{2} [$.

Bewijs. 1. Omdat $\cos x = 0$ juist als $x \in (2\mathbb{Z} + 1)\frac{\pi}{2}$, is $\tan$ gedefinieerd op $\mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1)\frac{\pi}{2}$. $\tan(-x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$. Omdat $\sin x \rightarrow 1$ en $\cos x \rightarrow 0$ ($\cos x > 0$) als $x \rightarrow (\pi/2)-$, is $\tan x \rightarrow +\infty$ als $x \rightarrow (\pi/2)-$. Omdat $\tan$ oneven is, is dan ook $\tan x \rightarrow -\infty$ als $x \rightarrow (-\pi/2)+$. Hierdoor bereikt $\tan$ willekeurig grote en willekeurig kleine waarden op $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Door de tussenwaardestelling wordt dus elke reële waarde bereikt door $\tan$ op $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

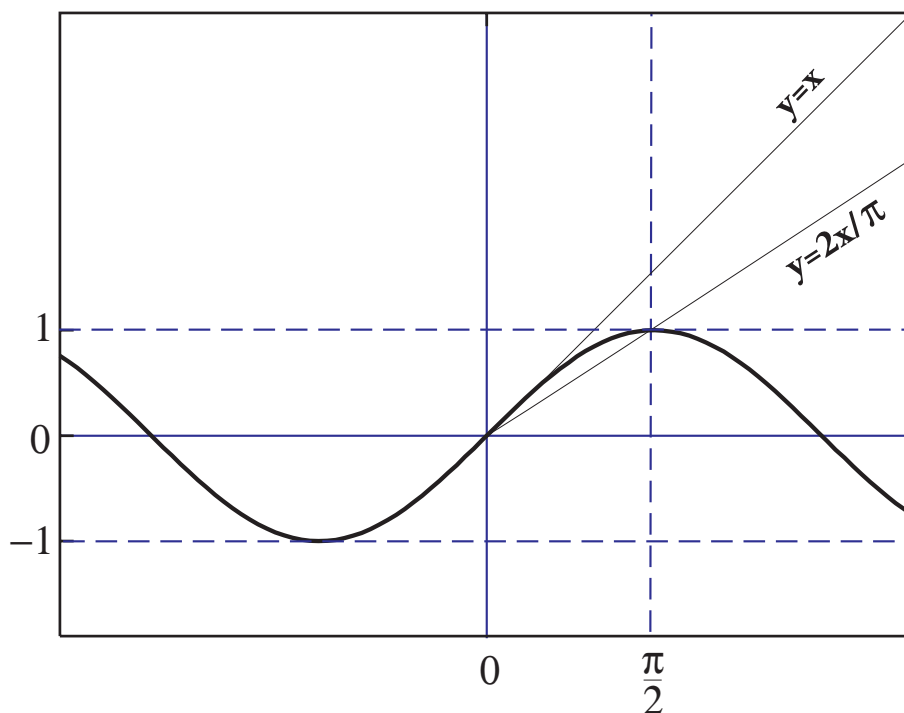
2. $\tan(x + \pi) = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$ en $\tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$, waaruit $\tan \frac{3\pi}{4} = \tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$.

3. $\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ als $x \notin (2\mathbb{Z} + 1)\frac{\pi}{2}$.

4. Stellen we $f(x) := \tan x - x$, dan is $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0$ op $]0, \frac{\pi}{2}[$, zodat $f(x)$ strikt stijgend is op dit interval, en dus (door continuïteit) $f(x) > f(0) = 0$ op $]0, \frac{\pi}{2}[$. $\square$

De elementaire goniometrische⁶ formules volgen gemakkelijk uit de hier verzamelde grondeigenschappen. Wij beschouwen ze als bekend, en gebruiken ze zonder extra bewijs.

De nu volgende ongelijkheden drukken uit (zie de figuur) dat de beeldlijn van de sinus in het eerste kwadrant onder de rechte $y = x$ en boven de rechte $y = \frac{2}{\pi}x$ ligt. De linkse ongelijkheid staat bekend als de **ongelijkheid van Jordan**.



Figuur 7.12: Beeldlijn van $\sin$, met illustratie van de ongelijkheid van Jordan.

7.2.11 Stelling.

$$\boxed{\frac{2x}{\pi} < \sin x < x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})} \quad (7.2)$$

Bewijs. Voor $f(x) := \frac{\sin x}{x}$ in $]0, \frac{\pi}{2}[$ is $f'(x) = \frac{\cos x(x - \tan x)}{x^2} < 0$, want $\tan x > x$ in dat interval. Bovendien is $f(0+) = 1$ en $f(\frac{\pi}{2}-) = \frac{2}{\pi}$. Wegens 4.2.12 (voor functies met negatieve afgeleide,

⁶letterlijk: *hoekmetende*

dus strikt dalend) hebben we dan

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

□

7.2.12 Stelling. Als α en β reële getallen zijn met $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, dan heeft het stelsel

$$\begin{cases} \cos \theta &= \alpha \\ \sin \theta &= \beta \end{cases}$$

juist één oplossing θ_0 in elk halfopen interval met lengte 2π .

Bewijs. (a) Voor $\alpha = 0$ is $\beta = \pm 1$. Het stelsel $\cos \theta = 0, \sin \theta = 1$ is gelijkwaardig met de vergelijking $\sin \theta = 1$ en heeft als oplossingenverzameling $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). De oplossingen liggen op een onderlinge afstand 2π , zodat er van deze vergelijking precies één oplossing ligt in een vooropgegeven halfopen interval met lengte 2π . Analoog voor het stelsel $\cos \theta = 0, \sin \theta = -1$.

(b) Voor $\alpha \neq 0$ is het gegeven stelsel gelijkwaardig met $\tan \theta = \beta/\alpha, \cos \theta = \alpha$. De eerste vergelijking heeft een unieke oplossing $\theta_0 \in]-\pi/2, \pi/2[$ want in dat interval is $\tan$ strikt stijgend en bereikt hij alle reële getallen. De oplossingenverzameling van de eerste vergelijking is dus $\theta = \theta_0 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Die oplossingen liggen op een onderlinge afstand π , zodat er precies twee oplossingen liggen in een vooropgegeven halfopen interval met lengte 2π , stel θ_1 en $\theta_2 := \theta_1 + \pi$. Voor beide geldt dat $1 + \tan^2 \theta_i = 1/\cos^2 \theta_i = 1/\alpha^2$, m.a.w. $\cos \theta_i = \pm \alpha$. Wegens

$$\cos \theta_2 = \cos(\theta_1 + \pi) = \cos \theta_1 \cos \pi - \sin \pi \sin \theta_1 = -\cos \theta_1$$

heeft één van de getallen θ_1, θ_2 een cosinus gelijk aan α , en de andere een cosinus gelijk aan $-\alpha$. In het gegeven halfopen interval met lengte 2π ligt dus precies één oplossing van het stelsel. □

7.2.13 Toepassing (Poolcoördinaten). Zij $P(x, y)$ een punt van het vlak $\mathbb{R}^2$, met $(x, y) \neq (0, 0)$. Dan bestaat er een unieke **voerstraal** $r > 0$ en een unieke **poolhoek** θ in een halfopen interval met lengte 2π (bijvoorbeeld in $]-\pi, \pi]$ of in $[0, 2\pi[$) waarvoor

$$x = r \cos \theta \quad \text{en} \quad y = r \sin \theta.$$

Bewijs. Als zulke r en θ bestaan, dan is $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, en

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Wegens de voorgaande stelling bestaat er juist één θ in een halfopen interval met lengte 2π (b.v., $]-\pi, \pi]$ of $[0, 2\pi[$) die hieraan voldoet. Dit toont aan dat de gezochte r en θ , als ze bestaan, zeker uniek zijn.

Hun bestaan zelf volgt ook uit de voorafgaande stelling. Nemen we immers

$$r := \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \alpha := \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \beta := \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

dan is $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ hetgeen θ in $]-\pi, \pi]$ of in $[0, 2\pi[$ ondubbelzinnig bepaalt. □

Het koppel (θ, r) noemen we het koppel **poolcoördinaten** van $P(x, y)$. Aan de oorsprong kennen we oneindig veel koppels poolcoördinaten toe, nl. alle koppels $(\theta, 0)$ met θ willekeurig in $]-\pi, \pi]$ of in $[0, 2\pi[$. Elk ander punt heeft dus precies één stel poolcoördinaten.

7.2.3 Andere cyclometrische functies

Behalve arcsin bestaan nog twee andere **inverse goniometrische functies** (ook **cyclometrische**⁷ **functies** genoemd), nl. arccos en arctan. Wegens

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

heeft arccos als functie geen echte reden van bestaan. We bekijken daarom alleen arctan. Noteren we tijdelijk

$$\text{Tan} := \tan /]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,$$

dan is Tan, met domein $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ en waardenverzameling $\mathbb{R}$, strikt stijgend en continu, met een afgeleide die nergens nul is. Bijgevolg heeft Tan een inverse met dezelfde eigenschappen (strikt stijgend en continu, afleidbaar op heel $\mathbb{R}$), waarvan de beeldlijn ontstaat door de beeldlijn van Tan rond de eerste bissectrice te spiegelen.

7.2.14 Definitie. De inverse

$$\arctan := (\text{Tan})^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[= \arctan(\mathbb{R})$$

noemen we de **arcustangens**.

7.2.15 Stelling.

1. De verwantschap tussen tan en arctan wordt gegeven door

$$\begin{cases} \tan(\arctan x) = x & (x \in \mathbb{R}) \\ \arctan(\tan x) = x & (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

2. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ is $\arctan x$ het enige getal uit $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (!!) waarvan de tangens gelijk is aan x .

3. $\arctan$ heeft als domein heel $\mathbb{R}$ en als waardenverzameling $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, is strikt stijgend, oneven en voor alle $x > 0$ is

$$\arctan x < x.$$

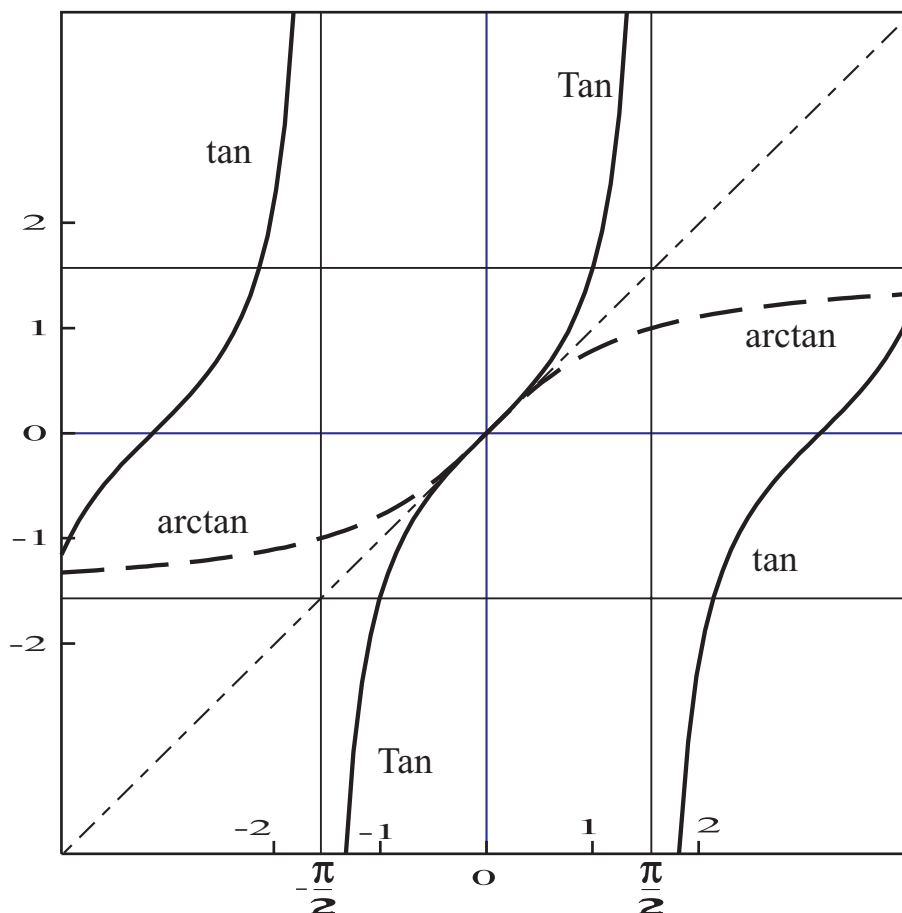
4. $\arctan 0 = 0$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ en

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

5. $\arctan$ is over $\mathbb{R}$ onbepaald afleidbaar, met in het bijzonder

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

⁷letterlijk: cirkelmetende



Figuur 7.13: $\arctan$ als inverse van $\text{Tan} := \tan /]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Bewijs. 1. Zoals in Stelling 7.1.22.1.

2–3. Uit de definitie van $\arctan$ als inverse van Tan .

4. Af te lezen uit de gespiegelde beeldlijn van Tan , wegens $\tan 0 = 0$, $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-\pi/2)^+} \tan x = -\infty$ en $\tan x > x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$).

5. Omdat $\arctan$ de inverse is van Tan , is voor elke $c \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\arctan'(\text{Tan } c) = \frac{1}{\text{Tan}' c} = \cos^2 c = \frac{1}{1 + \text{Tan}^2 c}.$$

Schrijven we $x = \text{Tan } c$, dan volgt $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$. De afgeleide functie $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ is op haar beurt onbepaald afleidbaar over $\mathbb{R}$. $\square$

7.3 Praktische integratietechniek

Dit onderdeel is geen leerstof Theorie. Kunnen toepassen volstaat.

Het zoeken van primitieven noemt men ook *onbepaald integreren*. Dat ‘onbepaalde’ is weerspiegeld in onze notatie $\int f$, zonder grenzen of integratie-interval. Een integraal $\int_a^b f$ noemt

men dan, in tegenstelling daarmee, een ‘bepaalde’ integraal. Het open interval waarover men de primitieve zoekt moet uit de context blijken.

De twee belangrijkste rekenregels voor onbepaalde integralen zijn: partiële integratie en substitutie. De betreffende eigenschappen zijn (uiteraard) geen eigenschappen van integratie, maar van afleiding; ze hadden ook in het hoofdstuk over afleiding kunnen staan.

7.3.1 Stelling. *Zijn f en g afleidbaar in het open interval I , dan is*

$$\int fg' = fg - \int f'g \quad \text{in } I.$$

Bewijs. Deze formule betekent hetzelfde als

$$\left(fg - \int f'g \right)' = fg',$$

en dit volgt uit $(fg)' = f'g + fg'$ en $(\int f'g)' = f'g$. □

7.3.2 Stelling. *Zij I een open interval waarin θ afleidbaar is. Als*

$$\int f = F \quad \text{in een open interval dat } \theta(I) \text{ bevat,}^8 \tag{7.3}$$

dan is

$$\int (f \circ \theta) \theta' = F \circ \theta \quad \text{in } I. \tag{7.4}$$

Bewijs. De formule (7.3) impliceert dat $F' = f$ over $\theta(I)$, m.a.w.

$$F'(\theta(x)) = f(\theta(x)), \quad \forall x \in I.$$

Samen met de kettingregel leidt dit tot

$$(F(\theta(x)))' = F'(\theta(x)) \theta'(x) = f(\theta(x)) \theta'(x), \quad \forall x \in I,$$

d.w.z. (7.4). □

7.3.3 Opmerking. Voor primitieven schrijft men doorgaans

$$\int f(x) dx \tag{7.5}$$

in plaats van

$$\left(\int f \right) (x).$$

De notatie (7.5) is verschrikkelijk slecht omdat, anders dan in een bepaalde integraal zoals $\int_a^b f(x) dx$, de integratieveranderlijke nu wel degelijk optreedt.⁹ In die erg bedenkelijke notatie luidt de vorige stelling dus:

$$\text{Als } \int f(y) dy = F(y) \text{ in } \theta(I), \text{ dan } \int f(\theta(x)) \theta'(x) dx = F(\theta(x)) \text{ in } I.$$

Men kan ze als volgt praktisch samenvatten: *Stelt men $y = \theta(x)$ in de ‘onbepaalde integraal’ $\int f(y) dy$, dan moet men $dy = \theta'(x) dx$ stellen.*

⁸ $\theta(I)$ is zeker een interval (continu beeld van een interval), maar niet noodzakelijk een open interval. De voorwaarde garandeert dat F ook afleidbaar is in $\theta(x_0)$ als $\theta(x_0) = \min(\theta(I))$ of $\theta(x_0) = \max(\theta(I))$.

⁹Men zou b.v. verleid kunnen worden tot de gruwel $G(0) = \int g(0) d0$.

Handmatig integreren is een combinatie van bekende onbepaalde integralen, partiële integratie, substitutie en splitsing in partieelbreuken.

7.3.4 Belangrijkste primitieven

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| \quad (x > 0 \text{ of } x < 0)$$

$$\int |x| dx = \frac{x|x|}{2}, \quad \int |x|^3 dx = \frac{x^3|x|}{4}, \quad \dots \quad \int |x|^k dx = \frac{x^k|x|}{k+1}, \quad \dots$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{argtanh} x \quad (-1 < x < 1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \quad (-1 < x < 1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{argsinh} x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argcosh} x \quad (x > 1)$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\operatorname{arctanh}(\cos x) = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \operatorname{arctanh}(\sin x) = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

Naast deze onmiddellijke onbepaalde integralen berust de praktijk van het integreren op onbepaalde integralen van rationale functies. Een daarvan behandelen we afzonderlijk.

7.3.5 Hulpstelling. *De onbepaalde integraal $I_n := \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ ($n \in \mathbb{N}$) kan, via een recursiebetrekking, uitgedrukt worden d.m.v. een rationale functie en een arctangens.*

Bewijs. Voor $n > 1$ hebben we

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} \\ &= \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^n} dt \\ &= \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} - \int \frac{t^2}{(1+t^2)^n} dt \\ &= I_{n-1} - \int \frac{t}{2} \frac{d(1+t^2)}{(1+t^2)^n} \\ &= I_{n-1} - \left(\frac{t}{2} \frac{(1+t^2)^{-n+1}}{-n+1} - \int \frac{(1+t^2)^{-n+1}}{-n+1} \frac{dt}{2} \right) \\ &= I_{n-1} - \frac{t}{2(1-n)(1+t^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} \end{aligned}$$

waaruit achtereenvolgens

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{t}{(2n-2)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} \\ I_{n-1} &= \frac{t}{(2n-4)(1+t^2)^{n-2}} + \frac{2n-5}{2n-4} I_{n-2} \\ &\vdots \\ I_2 &= \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2} I_1 = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2} \arctan t. \end{aligned}$$

□

7.3.6 Stelling. *Is de rationale functie $R(x)$ gedefinieerd over het interval I , dan kan de onbepaalde integraal $\int R(x) dx$ over I uitgedrukt worden d.m.v. rationale functies, logaritmen en arctangenten.*

Bewijs. Bij definitie is $R(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$, met $P_1(x)$ en $P_2(x)$ veeltermen, waarbij $P_2(x)$ geen enkel reëel nulpunt in I heeft. Na deling kunnen we schrijven dat

$$P_1(x) = P_2(x)Q(x) + P_3(x),$$

met $\text{gr } P_3 < \text{gr } P_2$, en volgt dat

$$R(x) = Q(x) + \frac{P_3(x)}{P_2(x)},$$

waarbij ditmaal P_3/P_2 een echte rationale functie is, d.w.z. met in de teller een veelterm van lagere graad dan de noemer. Dan is $\int R(x) dx = \int Q(x) dx + \int \frac{P_3(x)}{P_2(x)} dx$, waarbij $\int Q(x) dx$ onmiddellijk een veelterm oplevert. De berekening van $\int \frac{P_3(x)}{P_2(x)} dx$ berust op de splitsing van het integrandum in partieelbreuken. Daartoe zoeken we alle reële en alle (steeds in toegevoegde paren voorkomende) complexe nulpunten van $P_2(x)$. Een n -voudig reëel nulpunt a van $P_2(x)$ levert tot de ontbinding in partieelbreuken een bijdrage

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

en een m -voudig complex nulpunt $\alpha \pm i\beta$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) een bijdrage

$$\frac{B_1x + C_1}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{B_2x + C_2}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^2} + \cdots + \frac{B_mx + C_m}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^m}.$$

De bijdragen van alle reële en alle complexe nulpunten samen leveren een ontbinding op van de vorm

$$\frac{P_3(x)}{P_2(x)} = \frac{A}{x-a} + \cdots + \frac{B}{(x-b)^n} + \cdots + \frac{Cx + D}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} + \cdots + \frac{Ex + F}{((x-\gamma)^2 + \delta^2)^m}.$$

Door de noemers te verdrijven en de ontstane tellers te identificeren ontstaat een stelsel waaruit de reële constanten $A, \dots, B, \dots, C, D, \dots, E, F$ kunnen berekend worden. De onbepaalde integraal $\int \frac{P_3(x)}{P_2(x)} dx$ wordt hiermee herleid tot een som van onbepaalde integralen van de elementaire types

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a|, \quad \int \frac{dx}{(x-b)^n} = \frac{(x-b)^{-n+1}}{-n+1} \quad (n > 1)$$

en het type

$$\int \frac{Ex + F}{((x-\gamma)^2 + \delta^2)^m} dx \quad (\delta \neq 0).$$

Hierin wordt eerst de noemer gestandaardiseerd door de substitutie $x - \gamma = \delta t$. Men vindt

$$\begin{aligned} \int \frac{Ex + F}{((x-\gamma)^2 + \delta^2)^m} dx &= \int \frac{E(\gamma + \delta t) + F}{\delta^{2m} (1+t^2)^m} \delta dt \\ &= \frac{E\gamma + F}{\delta^{2m-1}} \int \frac{dt}{(1+t^2)^m} + \frac{E}{\delta^{2m-2}} \int \frac{t dt}{(1+t^2)^m} \\ &= \frac{E\gamma + F}{\delta^{2m-1}} I_m + \frac{E(1+t^2)^{-m+1}}{2\delta^{2m-2}(-m+1)} \\ &= \frac{E\gamma + F}{\delta^{2m-1}} I_m + \frac{E}{2\delta^{2m-2}(-m+1)} \left(1 + \left(\frac{x-\gamma}{\delta} \right)^2 \right)^{-m+1} \end{aligned}$$

waarbij I_m uit voorgaande hulpstelling bekend is. □

7.3.7 Stelling. De volgende onbepaalde integralen, waarin $\mathcal{R}$ telkens een rationale functie van de argumenten voorstelt, kunnen herleid worden tot onbepaalde integralen van rationale integranda:

1. $\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, in het bijzonder $\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt[k]{ax+b}\right) dx$
2. $\int \mathcal{R}(e^{ax}) dx$, in het bijzonder $\int \mathcal{R}(\sinh ax, \cosh ax) dx$ ($a \neq 0$)
3. $\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x) dx$
4. $\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ ($a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$).

Bewijs. Merk vooreerst op dat de onbepaalde integralen moeten bepaald worden over een geschikt interval, dat van de definitieverzameling van het integrandum afhangt, en dat we hier verder buiten beschouwing laten. Verderop stellen $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_1$ en $\mathcal{R}_2$ rationale functies van de argumenten voor.

In 1. substitueren we

$$t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad \text{waaruit omgekeerd } x = \frac{b - dt^k}{ct^k - a}.$$

Doordat $dx = \mathcal{R}_0(t) dt$ verkrijgen we

$$\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int \mathcal{R}\left(\frac{b - dt^k}{ct^k - a}, t\right) \mathcal{R}_0(t) dt = \int \mathcal{R}_1(t) dt.$$

In 2. substitueren we

$$t = e^{ax}, \quad \text{waaruit omgekeerd } x = \frac{\ln t}{a}.$$

Hierdoor verkrijgen we

$$\int \mathcal{R}(e^{ax}) dx = \int \mathcal{R}(t) \frac{dt}{at} = \int \mathcal{R}_1(t) dt.$$

In 3. substitueren we

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

waaruit omgekeerd $x = 2 \arctan t$. Doordat

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

verkrijgen we

$$\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x) dx = \int \mathcal{R}\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2 dt}{1+t^2} = \int \mathcal{R}_1(t) dt.$$

Voor 4. schrijven we vooreerst

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

De aangewezen substitutie is

$$t = \sqrt{|a|} \left(x + \frac{b}{2a} \right)$$

We onderscheiden de volgende gevallen:

(4.1): $\Delta > 0$ en $a > 0$. In dit geval is de substitutie

$$t = \sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a} \right), \quad \text{waaruit omgekeerd } x = \frac{t}{\sqrt{a}} - \frac{b}{2a}.$$

We verkrijgen

$$\begin{aligned} \int \mathcal{R} \left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c} \right) dx &= \int \mathcal{R} \left(\frac{t}{\sqrt{a}} - \frac{b}{2a}, \sqrt{t^2 - \frac{\Delta}{4a}} \right) \frac{dt}{\sqrt{a}} \\ &= \int \mathcal{R}_1 \left(t, \sqrt{t^2 - A^2} \right) dt \end{aligned}$$

waarin $A = \sqrt{\frac{\Delta}{4a}}$. Een nieuwe substitutie $t = A \cosh u$ leidt tot

$$\int \mathcal{R}_1 \left(t, \sqrt{t^2 - A^2} \right) dt = \int \mathcal{R}_1 (A \cosh u, A \sinh u) A \sinh u du = \int \mathcal{R}_2(e^u) du.$$

(4.2): $\Delta > 0$ en $a < 0$. In dit geval is de substitutie

$$t = \sqrt{-a} \left(x + \frac{b}{2a} \right), \quad \text{waaruit omgekeerd } x = \frac{t}{\sqrt{-a}} - \frac{b}{2a}.$$

We verkrijgen

$$\begin{aligned} \int \mathcal{R} \left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c} \right) dx &= \int \mathcal{R} \left(\frac{t}{\sqrt{-a}} - \frac{b}{2a}, \sqrt{-t^2 - \frac{\Delta}{4a}} \right) \frac{dt}{\sqrt{-a}} \\ &= \int \mathcal{R}_1 \left(t, \sqrt{A^2 - t^2} \right) dt \end{aligned}$$

waarin $A = \sqrt{-\frac{\Delta}{4a}}$. Een nieuwe substitutie $t = A \sin u$ leidt tot

$$\int \mathcal{R}_1 \left(t, \sqrt{A^2 - t^2} \right) dt = \int \mathcal{R}_1 (A \sin u, A \cos u) A \cos u du = \int \mathcal{R}_2(\sin u, \cos u) du.$$

(4.3): $\Delta < 0$ en $a > 0$. In dit geval is de substitutie

$$t = \sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a} \right), \quad \text{waaruit omgekeerd } x = \frac{t}{\sqrt{a}} - \frac{b}{2a}.$$

We verkrijgen

$$\begin{aligned} \int \mathcal{R} \left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c} \right) dx &= \int \mathcal{R} \left(\frac{t}{\sqrt{a}} - \frac{b}{2a}, \sqrt{t^2 - \frac{\Delta}{4a}} \right) \frac{dt}{\sqrt{a}} \\ &= \int \mathcal{R}_1 \left(t, \sqrt{t^2 + A^2} \right) dt \end{aligned}$$

waarin $A = \sqrt{-\frac{\Delta}{4a}}$. Een nieuwe substitutie $t = A \sinh u$ leidt tot

$$\int \mathcal{R}_1(t, \sqrt{t^2 + A^2}) dt = \int \mathcal{R}_1(A \sinh u, A \cosh u) A \cosh u du = \int \mathcal{R}_2(e^u) du.$$

Bemerk hierbij dat het vierde geval $\Delta < 0$ en $a < 0$ zich niet kan voordoen, omdat dan $ax^2 + bx + c < 0$ voor alle reële x . $\square$

7.3.8 Opmerking. De aangegeven werkwijze hoeft niet steeds de efficiëntste te zijn. Met name voor goniometrische integraal kunnen, afhankelijk van het geval, efficiëntere methodes voor de hand liggen.

Vaak nuttig is het volgende: we kunnen voorspellen hoe een primitieve eruitziet van een exponentiële vermenigvuldigd met een veelterm.

7.3.9 Stelling. Is $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$ en $P(x) = c_n x^n + \dots + c_0$ ($c_n \neq 0$) een n -de graadsveelterm, dan is

$$\int e^{\mu x} P(x) dx = e^{\mu x} \left(\frac{c_n}{\mu} x^n + \text{termen van lagere graad} \right) \quad (7.6)$$

over $\mathbb{R}$.

Bewijs. Door volledige inductie naar n . Voor $n = 0$ is de formule triviaal, want $P(x)$ is dan constant. Veronderstel de opgave correct voor graad 0 t.e.m. n , en bekijk een veelterm

$$Q(x) = c_{n+1} x^{n+1} + \underbrace{c_n x^n + \dots + c_0}_{P(x)}$$

van graad $n + 1$. Door partiële integratie volgt

$$\begin{aligned} \int e^{\mu x} Q(x) dx &= \int e^{\mu x} (c_{n+1} x^{n+1} + P(x)) dx \\ &= c_{n+1} \frac{e^{\mu x}}{\mu} x^{n+1} - \int c_{n+1} \frac{e^{\mu x}}{\mu} (n+1) x^n dx + \int e^{\mu x} P(x) dx \\ &= c_{n+1} \frac{e^{\mu x}}{\mu} x^{n+1} + \int e^{\mu x} \left(\left(c_n - \frac{c_{n+1}(n+1)}{\mu} \right) x^n + \dots + c_0 \right) dx. \end{aligned}$$

Door de inductiehypothese is de laatste primitieve gelijk aan $e^{\mu x}$ maal een veelterm van graad hoogstens n . Samenvoegend vinden we

$$\int e^{\mu x} Q(x) dx = e^{\mu x} \left(\frac{c_{n+1} x^{n+1}}{\mu} + \text{termen van lagere graad} \right).$$

$\square$

Een mooie toepassing van primitieven is het oplossen van een bepaald soort differentiaalvergelijking.

7.3.10 Definitie. Een **differentiaalvergelijking** is een vergelijking waarin een onbekende functie voorkomt als afgeleide van de eerste of van hogere orde.¹⁰ Een **oplossing** van een bepaalde differentiaalvergelijking over een bepaald open interval is een functie die van de vergelijking een gelijkheid maakt over het beschouwde interval. Dat houdt ook in dat die functie in dat interval zoveel keer afleidbaar is als de vergelijking het vereist.

¹⁰In deze context gebruikt men ook kortweg ‘vergelijking’ i.p.v. ‘differentiaalvergelijking’.

7.3.11 Opmerking. De methodes die in het vervolg ontwikkeld worden leiden tot *reële-waardige* oplossingen van onze reële differentiaalvergelijkingen. In principe komen ook *complexwaardige* functies van een reële veranderlijke in aanmerking als oplossingen van een reële differentiaalvergelijking.

7.3.12 Definitie. Een **beginwaardenvraagstuk** bestaat uit een differentiaalvergelijking en het opgeven van de waarde die de oplossing in een bepaald punt moet hebben, of van de waarden die de oplossing en sommige van haar afgeleiden in een bepaald punt moeten hebben.

7.3.13 Definitie. Een **differentiaalvergelijking van de eerste orde met gescheiden veranderlijken** heeft de gedaante

$$g(y)y' = f(x) \quad (7.7)$$

met I een open interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bekende functies en y de onbekende functie.

7.3.14 Stelling. Zij F een primitieve van f over I en G een primitieve van g over $\mathbb{R}$. De oplossingen van de differentiaalvergelijking (7.7) over I zijn de afleidbare oplossingen van de (algebraïsche) vergelijkingen

$$G(y) = F(x) + C \quad (x \in I) \quad (7.8)$$

met C constant.

Bewijs. Zij φ afleidbaar op I . Dan is φ een oplossing van (7.7) over I juist als

$$g(\varphi(x))\varphi'(x) = f(x) \quad (x \in I), \quad (7.9)$$

hetgeen equivalent is met het bestaan van een constante C waarvoor

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(x) dx + C, \quad (7.10)$$

of nog, door (7.4),

$$G(\varphi(x)) = \int f(x) dx + C \quad (x \in I).$$

□

7.3.15 Opmerkingen.

1. De eigenlijke oplossing φ van de differentiaalvergelijking moet nog bepaald worden uit de vergelijking (7.8). De constante C kan gebruikt worden om φ aan een beginvoorwaarde te laten voldoen. Een oplossing waarvoor $\varphi(x_0) = y_0$ geldt moet zeker gezocht worden onder de oplossingen van (7.8) waarvoor $G(y_0) = F(x_0) + C$, dus onder de oplossingen van $G(\varphi(x)) = F(x) + G(y_0) - F(x_0)$. *Niets garandeert echter dat elke oplossing van deze welbepaalde algebraïsche vergelijking ook aan de beginvoorwaarde $\varphi(x_0) = y_0$ voldoet, zie het voorbeeld hieronder.*
2. In de praktijk voert men de onbepaalde integratie snel formeel door via de symbolische substitutie-regel $dy = y'dx$ (zie opm. 6.5.3):

$$\int g(y) dy = \int g(y)y' dx = \int f(x) dx + C.$$

7.3.16 Voorbeeld. *Los het beginwaardenvraagstuk*

$$2(y-1)y' = 3x^2 + 4x + 2, \quad y(0) = -1$$

op over een geschikt open interval.

Formeel is

$$\int 2(y-1) dy = \int 2(y-1)y' dx = \int (3x^2 + 4x + 2) dx + C$$

d.w.z.

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + C$$

met $C = 3$ als we willen dat $y(0) = -1$. Vandaar

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3.$$

De oplossingen van deze vierkantsvergelijking zijn

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

maar slechts één hiervan, nl.

$$y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

voldoet aan de beginvoorwaarde $y(0) = -1$. (De oplossing $y = 1 + \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$ levert $y(0) = 3$.) Omdat $x^3 + 2x^2 + 2x + 4$ maar één reëel nulpunt heeft, nl. $x = -2$, is het beginwaardenvraagstuk daarmee opgelost over $] -2, +\infty[$.

7.4 Oefeningen

1. Bereken van de volgende functies de afgeleide waar ze bestaat:

- (1) $\sin(\sin(\sin x))$ (2) $e^{\sin x}$ (3) $1/\tan x$ (4) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ (5) $\ln\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$
 (6) $x - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2} \tan x)$ (7) $\frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a}{b} \tan x\right)$ (a en b constant met $ab \neq 0$)
 (8) $\ln\left|\tan \frac{x}{2}\right|$ (9) $\ln\left|\tan x + \frac{1}{\cos x}\right|$ (10) $\ln\left|x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2 + px + q}\right|$ (p en q constant)
 (11) $\arcsin\left(\frac{x - \frac{p}{2}}{\sqrt{q + \frac{p^2}{4}}}\right)$ (12) $\sin(\cos^2 x) \cos(\sin^2 x)$ (13) $\arctan(\tan^2 x)$ (14) $(\ln x)^x$
 (15) $x^{\ln x}$ (16) $x^{1/x}$ (17) $\sqrt{1-x^2} + \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ (18) $\frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \tan \frac{x}{2}\right)$
 (a constant met $|a| < 1$) (19) $\arcsin\left(\frac{\sin a \sin x}{1 - \cos a \cos x}\right)$ (a constant).

2. Bewijs de volgende ongelijkheden:

- (1) $-1 \leq \frac{a \cos x + b}{a + b \cos x} \leq 1$ ($0 \leq x \leq \pi$, $0 < b < a$ constant)
 (2) $\arctan x > x - \frac{x^3}{3}$ ($x > 0$).

3. Bewijs dat de volgende functies constant zijn, en bepaal de constante:

- (1) $2 \arctan(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \arctan \sqrt{x^2 - 1}$ ($|x| \geq 1$)
 (2) $\arccos\left(\frac{a \cos x + b}{a + b \cos x}\right) - 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2}\right)$, ($0 \leq x < \pi$, $0 < b < a$ constant).

4. Toon aan dat er voor elke $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gehele constanten $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ bestaan waarvoor

$$\begin{cases} \tan^{(2n)} x &= \sin x \left(\frac{a_1}{\cos^3 x} + \frac{a_2}{\cos^5 x} + \dots + \frac{a_n}{\cos^{2n+1} x} \right) \\ \tan^{(2n-1)} x &= \frac{b_1}{\cos^2 x} + \frac{b_2}{\cos^4 x} + \dots + \frac{b_n}{\cos^{2n} x}. \end{cases}$$

5. Bereken de volgende primitieven; a en b zijn constant. [Aanwijzing: substitutie.]

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{x}{1+x^2} dx & \quad (2) \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx & (3) \int \sin(a-x) dx & \quad (4) \int e^{ax} dx \quad (a \neq 0) \\ (5) \int \frac{x^3}{x-1} dx & \quad (6) \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx & (7) \int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} dx & \quad (8) \int (x-a)^{b-1} dx \quad (b \neq 0) \\ (9) \int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} & \quad (10) \int \frac{\cos x}{a+b \sin x} dx & (11) \int \frac{e^{-2/x^2}}{x^3} dx & \quad (12) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (13) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ (14) \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} dx & \quad (15) \int \sin^3 x dx & (16) \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx & \quad (17) \int \frac{x}{(a^2+x^2) \ln(a^2+x^2)} dx \end{aligned}$$

6. Bereken de volgende primitieven; a is constant. [Aanwijzing: partiële integratie.]

$$\begin{aligned} (1) \int x \sin x dx & \quad (2) \int \arctan x dx & (3) \int \arcsin x dx & \quad (4) \int x^a \ln x dx & \quad (5) \int x^3 e^{2x} dx \\ (6) \int \sin 2x e^{\sin x} dx & \quad (7) \int \arccos \frac{1}{\sqrt{x}} dx & (8) \int e^x \sin x dx. \end{aligned}$$

7. Stel een recursiebetrekking op voor:

$$\begin{aligned} (1) I_n &= \int \sin^n x dx & (2) J_n &= \int \cos^n x dx & (3) L_n &= \int \frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\ (4) K_{m,n} &= \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x} dx. \end{aligned}$$

8. Bereken de volgende primitieven; a en b zijn constant. [Aanwijzing: rationaal integrandum.]

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx & \quad (2) \int \frac{dx}{x^4+4} & (3) \int \frac{dx}{x^4-a^4} & \quad (4) \int \frac{x}{x^3+1} dx & \quad (5) \int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}} dx \\ (6) \int \frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt[6]{x}}} & \quad (7) \int \frac{dx}{\cosh x} & (8) \int \frac{dx}{2+e^{2x}} & \quad (9) \int \frac{dx}{\tan x + \sin x} \\ (10) \int \frac{dx}{1+a \cos x} & \quad (-1 < a < 1) & (11) \int \frac{dx}{\sin x \cos x} & \quad (12) \int \frac{dx}{\sin^3 x} & \quad (13) \int \frac{dx}{\sin x \cos^5 x} \\ (14) \int \tan^2 x dx & \quad (15) \int \frac{dx}{\cos^4 x} & (16) \int \frac{\sin x}{(a-b \cos x)^2} dx & \quad (17) \int \frac{x}{4-x^2+\sqrt{4-x^2}} dx \\ (18) \int \frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{2+x+\sqrt{x^2+4x+5}} dx. \end{aligned}$$

9. Bereken de volgende primitieven; a, b, c, d zijn constant.

$$\begin{aligned} (1) \int x^2 \sin x dx & \quad (2) \int \frac{dx}{(1+x^2)^{5/2}} & (3) \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx & \quad (4) \int e^{-2x} \left(2 \ln x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx \\ (5) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{1+x}{1-x} dx & \quad (6) \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{a+b \tan x}} & (7) \int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}} \quad (x \geq 1) \\ (8) \int x \ln(x+3) dx & \quad (9) \int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} dx & (10) \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx \quad (0 < x \leq 1) & \quad (11) \int \frac{\tan x}{\ln \cos x} dx \\ (12) \int \cos 7x \sinh 3x dx & \quad (13) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad (b^2 > 4ac \text{ en } b^2 < 4ac) \\ (14) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} & \quad (b^2 > 4ac, a > 0; b^2 > 4ac, a < 0; b^2 < 4ac, a > 0) \\ (15) \int_a^b x^2 f(x) dx, & \text{ waarbij } f(x) = \int_c^d \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \quad (0 < a < b; 0 < c < d). \end{aligned}$$

10. Bereken de volgende primitieven; a, b, c zijn constant.

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{dx}{\ln(x^x)} & \quad (2) \int \frac{x^3}{(a^2+x^2)^2} dx & (3) \int \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}} dx & \quad (4) \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^6 x} & \quad (5) \int \frac{\sin 2x}{\cos 3x} dx \\ (6) \int \frac{dx}{x^3(x^4-a^4)} & \quad (x > a > 0) & (7) \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} & \quad (ab \neq 0) & \quad (8) \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^2} \\ (a \neq 0) & \quad (9) \int \sin^2(\sqrt{x}) dx & (10) \int x \tan^2 x dx & \quad (11) \int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx & \quad (12) \int \frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} \\ (13) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2} \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})} & \quad (14) \int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx & (15) \int \sqrt{1-\sin x} dx \\ (16) \int \frac{5^x}{5^x+2^x} dx & \quad (17) \int \frac{\sin x - x \cos x}{(x+\sin x)^2} dx & (18) \int \frac{dx}{b+c \tanh ax} & \quad (b \neq c) & \quad (19) \int \frac{\sin x dx}{(\cos 2x)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$(20) \int \frac{x \ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}} dx \quad (21) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-a^n}} \quad (a > 0) \quad (22) \int \sqrt{2 - \frac{1}{\cos^2 x}} dx \quad (0 < x < \pi/4)$$

$$(23) \int \sin x \ln(\sin x) dx \quad (0 < x < \pi).$$

11. Zij $\mathcal{R}(x)$ een rationale functie. Toon aan dat de volgende primitieven (a, b, c, d constant) herleid kunnen worden tot primitieven van rationale integranda:

$$(1) \int \mathcal{R}(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) dx \quad (2) \int \cos x \mathcal{R}(\sqrt{\cos 2x}, \cos^2 x) dx$$

$$(3) \int \sqrt{1 + \cos x} \mathcal{R}(\cos x, \sqrt{a \cos x + b}) dx \quad (4) \int \sqrt{1 - \cos x} \mathcal{R}(\cos x, \sqrt{a \cos x + b}) dx.$$

12. Is $b \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$, en $f(x+a) = bf(x)$, bewijs dan dat $\int_0^{na} f = \frac{1-b^n}{1-b} \int_0^a f$.

13. * Is f integreerbaar over $[a, b]$, bewijs dan dat $\left(\int_a^b f\right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2$.

(Aanwijzing: voor elke $c \in \mathbb{R}$ is $\int_a^b (f(x) - c)^2 dx \geq 0$.)

14. Los op:

$$(1) y' = x^2 y^3 \text{ met } y(1) = 3 \quad (2) y' = 2y/x \text{ met } y(1) = 3 \quad (3) y' = e^{2x+5y} \text{ met } y(0) = -1$$

$$(4) y' = (y \sin x)/2 \text{ met } y(0) = e \quad (5) y' = (7y \ln x)/3 \text{ met } y(1) = e$$

$$(6) y' = e^{x-2y} \text{ met } y(1) = 1/2 \quad (7) y' = 4y^2 - 1 \text{ met } y(0) = -3/2.$$

15. Vraagstukken

- (a) De groei van bacteriën wordt dikwijls gemodelleerd door de vergelijking

$$N'(t) = \kappa N(t)$$

waarbij $N(t)$ (benaderd) het aantal bacteriën geeft op tijdstip t , en $\kappa > 0$ constant is. Deze vergelijking geeft enkel een realistisch model als de bacteriën onbeperkte plaats, voedingsstoffen, ... krijgen. Los ze op en bepaal $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ als $N(0) > 0$.

- (b) Als er maar plaats is voor $N_{\max} > 0$ bacteriën, dan wordt een meer realistisch model gegeven door

$$N'(t) = \kappa \left(1 - \frac{N(t)}{N_{\max}}\right) N(t).$$

Los ze op en bepaal $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ als $0 < N(0) < N_{\max}$.

- (c) De tractrix is de kromme die ontstaat als baan (in het vlak) van het ene uiteinde van een staaf, wanneer het andere uiteinde een rechte baan volgt. Veronderstel dat de rechte de Y -as is en de lengte van de staaf 1. Stel $f(x) :=$ het gedeelte van de baan boven de X -as ($0 < x \leq 1$). Leid dan uit de fysische veronderstelling dat op elk moment de staaf raakt aan de tractrix een (differentiaal)vergelijking af voor f . Los ze op. Controleer nadien dat de oplossing in parametergedaante kan geschreven worden als

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\cosh t} \\ y(t) = t - \tanh t. \end{cases}$$

Hoofdstuk 8

Complexe reeksen

We beginnen dit hoofdstuk met een aanvulling over reële rijen.

8.1 Boven- en onderlimiet van een begrensde reële rij

Als een reële rij convergeert, stel $x_n \rightarrow L$, en $\varepsilon > 0$ is willekeurig, dan geldt

$$L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$$

als n groot genoeg is. We zullen nu met elke begrensde rij (convergent of niet) twee getallen L_1, L_2 associëren zodanig dat

$$L_1 - \varepsilon < x_n < L_2 + \varepsilon$$

als n groot genoeg is.

Zij $a \leq x_n \leq b$ voor alle n , met a en b gegeven reële getallen. Stel

$$S_1 = \sup\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$$

$$S_2 = \sup\{x_2, x_3, x_4, \dots\}$$

$$S_3 = \sup\{x_3, x_4, \dots\}$$

$$\vdots$$

$$S_k = \sup_{n \geq k} x_n$$

$$\vdots$$

(Elk van die verzamelingen is nietleeg en naar boven begrensd door b , zodat elk een supremum heeft.) Omdat

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\} \supseteq \{x_2, x_3, x_4, \dots\} \supseteq \{x_3, x_4, \dots\} \supseteq \dots$$

en omdat het supremum niet vergroot als de verzameling verkleint, zal

$$b \geq S_1 \geq S_2 \geq S_3 \geq \dots \geq a,$$

m.a.w. $S_1, S_2, \dots$ is een dalende rij uit $[a, b]$, blijkbaar naar onder begrensd (door a), en dus convergent.

8.1.1 Definitie. Het getal $\lim_n S_n$ noemt men de **bovenlimiet** van de rij x_n , en men noteert hiervoor $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n$ of $\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

De definitie kan herschreven worden als

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq k} x_n = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq k} x_n.$$

De laatste gelijkheid berust op het feit dat de rij $S_1, S_2, \dots$ dalend is; $\lim_n S_n$ en $\inf_n S_n$ zijn dan hetzelfde.

8.1.2 Opmerking. Laat men van een rij $x_1, x_2, \dots$ een eindig aantal begintermen vallen, dan verandert de bovenlimiet niet. De bovenlimiet is immers de limiet van de rij $S_1, S_2, \dots$, en deze verandert niet als men een eindig aantal begintermen laat vallen.

8.1.3 Voorbeeld. $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = 1$.

8.1.4 Stelling (Hoofdeigenschap van bovenlimiet). *Is $x_1, x_2, \dots$ een begrensde rij van reële getallen, dan bestaat er bij elke $\varepsilon > 0$ een natuurlijke N met de eigenschap dat $x_n < \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n + \varepsilon$ voor alle $n > N$.*

Bewijs. Vermits $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = \inf_n S_n$ bestaat er een $S_N < \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n + \varepsilon$. Maar als $k \geq N$ zal

$$x_k \in \{x_N, x_{N+1}, \dots\}$$

en dus

$$x_k \leq \sup\{x_N, x_{N+1}, \dots\} = S_N < \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n + \varepsilon.$$

□

Op geheel analoge wijze kan men de **onderlimiet** van een begrensde rij definiëren als limiet van de stijgende rij $I_1 \leq I_2 \leq I_3 \leq \dots$, met $I_k := \inf_{n \geq k} x_n$. Hiervoor hebben we

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf_{n \geq k} x_n = \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq k} x_n$$

waarbij de laatste gelijkheid berust op het feit dat de rij $I_1, I_2, \dots$ stijgend is. Men toont gemakkelijk als **Hoofdeigenschap van de onderlimiet** aan dat

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n - \varepsilon < x_n$$

zodra n groot genoeg is.

8.1.5 Stelling. *Is $x_1, x_2, \dots$ een rij van reële getallen met $a \leq x_n \leq b$ voor alle $n \geq N$, dan is*

$$a \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq b.$$

Bewijs. Omdat $S_1, S_2, \dots$ vanaf rangnummer N een rij uit $[a, b]$ is zal haar limiet $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n$ eveneens in $[a, b]$ liggen, en analoog voor $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Omdat $I_n \leq S_n$ voor alle n , zal na limietovergang gelden dat $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n$. □

8.1.6 Stelling.

1. Als een rij convergeert, dan zijn onder- en bovenlimiet gelijk aan de limiet van de rij.
2. Zijn onder- en bovenlimiet van een begrensde rij gelijk, dan is die rij convergent, en haar limiet is de gemeenschappelijke waarde van onder- en bovenlimiet.

Bewijs. 1. Zij $x_n \rightarrow L$. Kiezen we willekeurig $\varepsilon > 0$, dan hebben we $L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$ voor $n > N$. Hieruit volgt $L - \varepsilon \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq L + \varepsilon$. Na limietovergang $\varepsilon \rightarrow 0$ volgt $L \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq L$, d.i. $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = L$.

2. Zij $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = L$. Wegens de gecombineerde hoofdeigenschappen van onder- en bovenlimiet hebben we dan dat

$$L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$$

zodra n groot genoeg is. Dit betekent dat $x_n \rightarrow L$. □

Later komen ook nog de volgende eigenschappen te pas.

8.1.7 Stelling. Voor alle begrensde reële rijen (x_n) en (y_n) geldt:

1.
$$\underline{\lim}(c + x_n) = c + \underline{\lim} x_n, \quad \overline{\lim}(c + x_n) = c + \overline{\lim} x_n \quad (c \text{ constant})$$
2.
$$\underline{\lim}(cx_n) = c \underline{\lim} x_n, \quad \overline{\lim}(cx_n) = c \overline{\lim} x_n \quad (c \geq 0 \text{ constant})$$
3. $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim} x_n$ en $\underline{\lim}(-x_n) = -\overline{\lim} x_n$
4. Als $x_n \leq y_n$ voor alle $n \geq N$, dan is $\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} y_n$ en $\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} y_n$.
5. Als alle $x_n \geq 0, y_n \geq 0$, dan is

$$\overline{\lim}(x_n y_n) \leq (\overline{\lim} x_n)(\overline{\lim} y_n), \quad \underline{\lim}(x_n y_n) \geq (\underline{\lim} x_n)(\underline{\lim} y_n)$$

6. Als alle $x_n \geq 0, y_n \geq 0$ en $\lim x_n$ bestaat, dan is

$$\overline{\lim}(x_n y_n) = (\lim x_n)(\overline{\lim} y_n), \quad \underline{\lim}(x_n y_n) = (\lim x_n)(\underline{\lim} y_n).$$

Bewijs.

1.
$$\underline{\lim}(c + x_n) = \lim_k \inf_{n \geq k} (c + x_n) = \lim_k (c + \inf_{n \geq k} x_n) = c + \lim_k \inf_{n \geq k} x_n = c + \underline{\lim} x_n.$$
2.
$$\underline{\lim}(cx_n) = \lim_k \inf_{n \geq k} (cx_n) = \lim_k (c \inf_{n \geq k} x_n) = c \lim_k \inf_{n \geq k} x_n = c \underline{\lim} x_n.$$
3.
$$\overline{\lim}(-x_n) = \lim_k \sup_{n \geq k} (-x_n) = \lim_k (-\inf_{n \geq k} x_n) = -\lim_k \inf_{n \geq k} x_n = -\underline{\lim} x_n.$$
4. Wegens 1.2.17.1 is $\sup_{n \geq k} x_n \leq \sup_{n \geq k} y_n$ zodra $k \geq N$. Vandaar hebben we (eigenschap van limieten) dat $\lim_k \sup_{n \geq k} x_n \leq \lim_k \sup_{n \geq k} y_n$.

5.

$$\overline{\lim}(x_n y_n) = \limsup_{k \quad n \geq k} (x_n y_n) \leq \lim_k \left(\sup_{n \geq k} x_n \sup_{n \geq k} y_n \right) = (\limsup_{k \quad n \geq k} x_n) (\limsup_{k \quad n \geq k} y_n),$$

waarbij we gebruik gemaakt hebben van Stelling 1.2.22.3. Analoog voor de onderlimiet.

6. Als $x_n \rightarrow L > 0$, en $L \geq \varepsilon > 0$, dan is $0 \leq L - \varepsilon \leq x_n \leq L - \varepsilon$ zodra $n \geq N$, zodat (door delen 2. en 4.)

$$(L - \varepsilon) \overline{\lim} y_n \leq \overline{\lim}(x_n y_n) \leq (L - \varepsilon) \overline{\lim} y_n.$$

Omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig is, is dus $\overline{\lim}(x_n y_n) = L \overline{\lim} y_n = \lim x_n \overline{\lim} y_n$. Als $L = 0$, dan is $\overline{\lim}(x_n y_n) \leq L \overline{\lim} y_n = 0$, en triviaal ook $\overline{\lim}(x_n y_n) \geq 0$. Analoog voor de onderlimiet. $\square$

8.2 Complexe getallen

8.2.1 Definitie. Een **complex getal** is een koppel reële getallen (x, y) dat men noteert als $x + iy$, met i , de **imaginaire eenheid**, een nieuw symbool. Hierin noemen we x het **reëel deel** en y het **imaginair deel**¹ van $z = x + iy$, en wij noteren hiervoor $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. De verzameling der complexe getallen wordt voorgesteld door $\mathbb{C}$.

Zoals voor alle koppels geldt:

$$(x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2) \iff x_1 = x_2 \quad \& \quad y_1 = y_2,$$

m.a.w.

$$(z_1 = z_2) \iff (\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \quad \& \quad \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2).$$

Verder definiëren we som en product van complexe getallen als volgt.

8.2.2 Definitie.

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1) +_{\mathbb{C}} (x_2 + iy_2) &:= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ (x_1 + iy_1) \bullet_{\mathbb{C}} (x_2 + iy_2) &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

Deze definities volgen uit de gebruikelijke rekenregels voor reële getallen als men daar de rekenregel $i^2 = -1$ aan toevoegt. Met het nodige geduld kan men nagaan dat $\mathbb{C}$, voorzien van deze bewerkingen, een veld is. In het bijzonder heeft elk complex getal $x + iy \neq 0 + i0$ een multiplicatief invers, nl.

$$\frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2},$$

dat men afleest uit

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{1}{(x + iy)} \bullet_{\mathbb{C}} \frac{(x - iy)}{(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Een reëel getal x kan geïdentificeerd worden met het complex getal $x + i0$. Na deze identificatie kunnen we schrijven dat $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Voor reële getallen vallen som en product samen met de overeenkomstige complexe bewerkingen. Hierdoor is het verantwoord in de velden $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ dezelfde notaties te gebruiken voor som en product. Voortaan schrijven we dus kortweg $+$ i.p.v. $+_{\mathbb{C}}$ en $\bullet$ (of niets) i.p.v. $\bullet_{\mathbb{C}}$.

¹logischer zou zijn, dat men iy , en niet y , het imaginaire deel noemde. Met de huidige benamingen is het imaginair deel reëel!

8.2.3 Definitie. De **absolute waarde** (of **modulus**)² van het complex getal $x + iy$ is het nietnegatief reëel getal gedefinieerd door

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Deze definitie levert voor *reële* getallen de gewone absolute waarde op, gedefinieerd in 1.1.3. Men bewijst gemakkelijk dat de driehoeksongelijkheid ook voor complexe getallen geldt. Voor $z_1 \in \mathbb{C}$ en $z_2 \in \mathbb{C}$ hebben we dus

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (8.1)$$

8.2.4 Definitie. Een complex getal $x + iy$ kan in een vlak meetkundig voorgesteld worden als het punt met coördinaten (x, y) . Dit vlak noemt men het **complexe vlak**, de eerste as de **reële as**, de tweede as de **imaginaire as**. Complexe getallen van de vorm iy heten **zuiver imaginair**. Het zuiver imaginaire getal i noemt men de **imaginaire eenheid**.

8.2.5 Definitie. Het complex getal $\bar{z} := x - iy$ heet het **complex toegevoegde (getal)** van $z = x + iy$.

Men stelt gemakkelijk vast dat

- (i) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- (ii) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

De volgende stelling wijst op een fundamenteel verschil tussen $\mathbb{C}$ vergeleken met $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$:

8.2.6 Stelling. *Het veld $\mathbb{C}$ kan onmogelijk geordend worden.*

Bewijs. In elk geordend veld geldt voor elke $a \neq 0$ dat $a^2 > 0$. Wegens $i \neq 0$ en $i^2 < 0$ kan $\mathbb{C}$ onmogelijk een geordend veld zijn. $\square$

*Schrijf nooit ongelijkheden tussen complexe getallen!*³

Euler voerde de volgende handige notatie in:

8.2.7 Definitie. (Formule van Euler) Voor elke $x \in \mathbb{R}$ is⁴

$$e^{ix} := \cos x + i \sin x$$

De voerstraal van het punt (x, y) , nl. $\sqrt{x^2 + y^2}$, is gelijk aan de modulus van het complex getal $x + iy$. Dit levert de z.g. **goniometrische voorstelling** van $z = x + iy$ op, nl.

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|e^{i\theta}$$

met θ een poolhoek van $z = (x, y)$. Het nut van deze voorstelling blijkt o.m. uit

²Latijn voor *maat*. Meervoud: moduli.

³tenzij het reële getallen zijn

⁴In Wiskundige Analyse III zal duidelijk worden waar deze nogal kunstmatige definitie vandaan komt.

8.2.8 Stelling. Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt

$$e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}.$$

*I.h.b. geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$ de **formule van de Moivre**⁵ $(e^{ix})^n = e^{inx}$.*

Bewijs. D.m.v. de som-formules voor sin en cos rekt men gemakkelijk na⁶ dat

$$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = \cos(x+y) + i \sin(x+y).$$

De formule van de Moivre volgt hieruit door volledige inductie. $\square$

8.2.9 Stelling. Voor elke $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ is $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ en is de som van een poolhoek van z_1 en een poolhoek van z_2 een poolhoek van $z_1 z_2$.

Bewijs. Schrijven we $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ en $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$, dan is

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

We herkennen in het rechterlid een goniometrische voorstelling van $z_1 z_2$ met voerstraal $|z_1||z_2|$ en poolhoek $\theta_1 + \theta_2$. $\square$

8.2.10 Toepassing (Complexe wortels). Zij $z_0 = |z_0|e^{i\theta_0}$ (met $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ of $\theta_0 \in]-\pi, \pi]$) een complex getal verschillend van nul, en n een positief natuurlijk getal. Dan heeft de vergelijking $\zeta^n = z_0$ als oplossingen in $\mathbb{C}$ de n complexe getallen

$$\sqrt[n]{|z_0|}e^{i\frac{\theta_0}{n}}, \sqrt[n]{|z_0|}e^{i\frac{\theta_0+2\pi}{n}}, \sqrt[n]{|z_0|}e^{i\frac{\theta_0+4\pi}{n}}, \dots, \sqrt[n]{|z_0|}e^{i\frac{\theta_0+2k\pi}{n}}, \dots, \sqrt[n]{|z_0|}e^{i\frac{\theta_0+2(n-1)\pi}{n}}.$$

Bewijs. Door de formule van de Moivre blijkt dat elke $\zeta_k := \sqrt[n]{|z_0|}e^{i\frac{\theta_0+2k\pi}{n}}$ een oplossing van de vergelijking is. Alle ζ_k 's ($k = 0, 1, \dots, n-1$) zijn bovendien verschillend. Inderdaad, veronderstel eens dat $\zeta_k = \zeta_\ell$. Omdat het punt $\zeta_k = \zeta_\ell$ in het interval $[\frac{\theta_0}{n}, \frac{\theta_0}{n} + 2\pi[$ maar één enkele poolhoek kan hebben, en omdat $\frac{\theta_0+2k\pi}{n}, \frac{\theta_0+2\ell\pi}{n}$ beide in dat interval liggen, volgt

$$\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} = \frac{\theta_0 + 2\ell\pi}{n}.$$

Vandaar $k = \ell$. We hebben dus n verschillende oplossingen van de vergelijking gevonden. Méér dan n kunnen er niet zijn, want dan zouden we $\zeta^n - z_0$ kunnen ontbinden in méér dan n lineaire factoren, wat natuurlijk niet kan. $\square$

8.2.1 Convergentie van complexe rijen

In Hoofdstuk 2 zijn rijen van reële getallen onderzocht. We besteden nu enkele beschouwingen aan rijen van *complexe* getallen.

De meeste definities en eigenschappen die berusten op de absolute waarde van reële getallen blijven behouden als men in plaats daarvan de absolute waarde van complexe getallen gebruikt. (Er mogen in die begrippen of eigenschappen natuurlijk geen ongelijkheden tussen complexe getallen voorkomen.) Ook de meeste bewijzen veranderen nauwelijks.

⁵Na voorafgaande stappen in 1707 en 1730 vond de Moivre in 1738 een procedure voor worteltrekking die op de gegeven formule neerkomt, en die Euler tot de huidige elegante gedaante leidde.

⁶omgekeerd hoeft men de som-formules voor sin en cos niet te onthouden als men $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ onthoudt

Zo blijft o.m. behouden: de definitie van *convergente rij*. Schrijf deze definitie, bij wijze van oefening, op en bewijs dat

$$(x_n + iy_n \rightarrow x_0 + iy_0) \iff (x_n \rightarrow x_0 \quad \& \quad y_n \rightarrow y_0).$$

Blijft eveneens behouden: een complexe rij convergeert als en slechts als ze aan het *kenmerk van Cauchy* voldoet. Het bewijs daarvan is geheel analoog aan het reële bewijs, zodra men beschikt over

8.2.11 Stelling (Stelling van de convergente complexe deelrij). *Elke rij $z_1, z_2, \dots$ van complexe getallen uit de gesloten schijf*

$$\overline{B}(0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$$

($R > 0$) heeft een deelrij $z_{n_1}, z_{n_2}, \dots$ die convergeert naar een punt z_0 van $\overline{B}(0, R)$.

Bewijs. Zij dus $|z_n| := |x_n + iy_n| \leq R$ voor alle n . Wegens $|x_n| \leq |z_n|$ is dan voor alle n ook $|x_n| \leq R$, zodat (x_n) een convergente deelrij $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in [-R, R]$ bezit (stelling van de convergente deelrij in $\mathbb{R}$). Beschouw dan de overeenkomstige rij van imaginaire delen, nl. (y_{n_k}) . Het is helemaal niet zeker dat deze rij convergeert. Maar het is wel een *begrensde* reële rij want $|y_{n_k}| \leq R$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Vandaar heeft (y_{n_k}) een convergente deelrij $y_{n_l} \rightarrow y_0$. Nu beschouwen we de hiermee overeenkomende rij van de reële delen, nl. (x_{n_l}) . Dit is een deelrij van de eerste deelrij (x_{n_k}) , en zal bijgevolg naar dezelfde limiet x_0 convergeren. Combineren we dit, dan hebben we een rij $(x_{n_l} + iy_{n_l})_l$ gevonden die naar $x_0 + iy_0$ convergeert. Dit punt ligt in $\overline{B}(0, R)$, want uit $(\forall l \in \mathbb{N})(|x_{n_l} + iy_{n_l}| \leq R)$ volgt na limietovergang $l \rightarrow +\infty$ dat $|x_0 + iy_0| \leq R$. $\square$

8.3 Convergentie van complexe reeksen

8.3.1 Definitie. Zij $z_1, z_2, \dots$ een rij van complexe getallen. Dan definiëren we

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots := \lim_{n \rightarrow +\infty} (z_1 + z_2 + \dots + z_n)$$

de **(reeks)som** van de z_n , als deze limiet bestaat. Men noemt $s_n := z_1 + z_2 + \dots + z_n$ de n -de **partieelsom**.

Als de beginterm ongewoon is, dan voegt men deze informatie toe onder het sommatieteken. Zo is $\sum_{n=3}^{+\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (z_3 + \dots + z_n)$, en $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (z_0 + \dots + z_n)$.

8.3.2 Opmerking. De rij van de partieelsommen s_n noemt men vaak de **reeks**⁷ van de z_n , en men noteert de reeks vaak als $\sum_{n \geq 1} z_n := (s_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$.⁸ De reeks convergeert dus juist als de reekssom bestaat.

⁷In niet-wiskundig Nederlands betekenen de woorden ‘rij’ en ‘reeks’ hetzelfde. Met ons koppel *rij/reeks* komt overeen: *suite/série* in het Frans, *sequence/series* in het Engels, *Folge/Reihe* in het Duits.

⁸Niet iedereen maakt, zoals wij dat wel doen, in de notatie een onderscheid tussen de *reeks* (een rij van getallen) en de *reekssom* (een getal). De notatie $z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots$ wordt zowel gebruikt voor de reeks als voor de reekssom.

Een reële reeks $\sum x_n$ die niet convergent is, kan in het bijzonder naar $+\infty$ of naar $-\infty$ divergeren, waarmee bedoeld wordt dat de rij (s_n) naar $+\infty$ of naar $-\infty$ divergeert.

8.3.3 Opmerking. Het weglaten van een eindig aantal begintermen beïnvloedt de convergentie van een reeks niet, maar wel de eventuele reekssom. Elke weggelaten term verdwijnt immers uit de partieelsommen en bijgevolg ook uit de reekssom!

Voor reële reeksen zonder negatieve termen is de volgende vaststelling nuttig.

8.3.4 Stelling. *De reële reeks $\sum x_n$, met $x_n \geq 0$ voor alle n , is convergent als en slechts als de rij (s_n) der partieelsommen naar boven begrensd is. Is de reeks convergent, dan is de reekssom gelijk aan $\sup s_n$; is de reeks niet convergent, dan is ze divergent naar $+\infty$.*

Bewijs. Bij definitie convergeert de reeks $\sum x_n$ als en slechts als de rij (s_n) convergeert. Omdat de reeks uit nietnegatieve termen bestaat, is $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq \dots$. We kunnen dan 2.2.2 toepassen op de rij (s_n) . $\square$

Even eenvoudig is

8.3.5 Stelling. *Als de complexe reeks $\sum z_n$ convergeert, dan $z_n \rightarrow 0$ als $n \rightarrow +\infty$.*

Bewijs. Voor $n \geq 2$ hebben we $z_n = s_n - s_{n-1}$, zodat, als de reekssom S is, $\lim_n z_n = \lim_n s_n - \lim_n s_{n-1} = S - S = 0$. $\square$

Deze stelling levert een nuttige voldoende voorwaarde op voor niet-convergentie.

8.3.6 Gevolg. *Als $z_n \not\rightarrow 0$, dan is $\sum z_n$ niet convergent.*

8.3.7 Opmerking. In 8.4.11 zal blijken dat uit $z_n \rightarrow 0$ niet hoeft te volgen dat $\sum z_n$ convergeert.

Als onmiddellijke toepassing onderzoeken we een fundamentele reeks.

8.3.8 Definitie. De **complexe meetkundige reeks** is $\sum_{n \geq 0} \rho^n$ met ρ , genoemd de **reden**⁹ van de reeks, een vast complex getal.

8.3.9 Stelling.¹⁰ *Zij $\rho \in \mathbb{C}$.*

De meetkundige reeks $\sum_{n \geq 0} \rho^n$ convergeert als en slechts als $|\rho| < 1$, en de reekssom is $\frac{1}{1-\rho}$.

Bewijs. Voor $s_n = 1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{n-1}$ geldt blijkbaar dat $\rho \cdot s_n = \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^n$, zodat $(1 - \rho)s_n = 1 - \rho^n$, voluit

$$1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{n-1} = \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} \quad (\rho \neq 1)$$

Vandaar de bespreking:

1. als $|\rho| \geq 1$ dan $|\rho^n| = |\rho|^n \geq 1$, zodat $\rho^n \not\rightarrow 0$, en de reeks $\sum \rho^n$ niet convergent is.

⁹in de betekenis van *ratio*, d.i. *verhouding*.

¹⁰Bewezen door Nicolaus van Oresme, 1350. De meetkundige reeks met reden $1/4$ was al door Archimedes (200 vC) gesommeerd.

2. als $|\rho| < 1$ dan $\rho^n \rightarrow 0$ (want dit is hetzelfde als $|\rho|^n \rightarrow 0$, bijzonder geval van $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ als $0 < a < 1$). Daardoor volgt uit de bovenstaande formule na $n \rightarrow +\infty$ dat

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho} \quad (|\rho| < 1)$$

□

8.3.10 Stelling (Associativiteit). *Als men in een convergente reeks de termen door het plaatsen van haakjes groepeerd, dan is ook de nieuwe reeks convergent, en wel naar de reekssom van de oude reeks.*

Bewijs. Zij $\sum z_n$ (met partielsommen s_n) convergent, met

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \lim s_n = S.$$

Beschouw dan de nieuwe reeks

$$(z_1 + z_2 + \cdots + z_{m_1}) + (z_{m_1+1} + z_{m_1+2} + \cdots + z_{m_2}) + \cdots + (\dots) + \dots$$

Elke partielsom σ_n van deze tweede reeks is een partielsom van de eerste, want

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (z_1 + z_2 + \cdots + z_{m_1}) = z_1 + z_2 + \cdots + z_{m_1} = s_{m_1} \\ \sigma_2 &= (z_1 + z_2 + \cdots + z_{m_1}) + (z_{m_1+1} + z_{m_1+2} + \cdots + z_{m_2}) = z_1 + z_2 + \cdots + z_{m_2} = s_{m_2} \end{aligned}$$

enzovoort. Vandaar is (σ_n) een deelrij van de rij (s_n) en omdat $s_n \rightarrow S$ zal ook $\sigma_n \rightarrow S$. □

8.3.11 Opmerking. In een convergente reeks mag men dus, zoals in een eindige som, haakjes plaatsen zonder de som te beïnvloeden. Haakjes *weglaten* of *verplaatsen* mag dan weer niet! Bekijken we eens de reeks $(1-1) + (1-1) + \dots$, die naar 0 convergeert, want het is de triviale reeks $0+0+\dots$. Laten we de haakjes weg, dan ontstaat de reeks $1-1+1-1+\dots$, en deze is niet convergent, want haar algemene term nadert niet naar 0; door de haakjes te verplaatsen ontstaat de reeks $1+(-1+1)+(-1+1)+\dots$, die naar 1 convergeert want het is de triviale reeks $1+0+0+\dots$.

8.3.12 Stelling (Lineariteit).

1. Als $\sum a_n$ en $\sum b_n$ convergeren, dan is $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.
2. Als $\sum a_n$ convergeert, en α is een complexe constante, dan is $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Bewijs. 1. Is s_n de n -de partielsom van de reeks $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots$, dan is

$$s_n = (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n),$$

met $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ als limiet.

2. Is s_n de n -de partielsom van de reeks $\alpha a_1 + \alpha a_2 + \dots$, dan is

$$s_n = \alpha(a_1 + \cdots + a_n),$$

met $\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ als limiet. □

8.3.13 Stelling (Kenmerk van Cauchy voor reeksen). *De complexe reeks $\sum z_n$ convergeert als en slechts als er bij elke $\varepsilon > 0$ een natuurlijke N_ε bestaat met de eigenschap dat*

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon \quad \text{voor } n \geq N_\varepsilon, p \geq 1. \quad (8.2)$$

Bewijs. Als de reeks $\sum z_n$ convergeert, dan is (s_n) een convergente rij. Wegens het kenmerk van Cauchy voor rijen betekent dit dat

$$|s_n - s_m| < \varepsilon \quad \text{voor } n \geq N_\varepsilon, m \geq N_\varepsilon.$$

Kiezen we $n \geq N$ en $m = n + p$ met $p \geq 1$ dan vinden we $|s_n - s_{n+p}| < \varepsilon$, dus (8.2).

Omgekeerd, als (8.2) geldt, neem dan $n \geq N_\varepsilon, m \geq N_\varepsilon$, met (b.v.) $m < n$. Dan is $n = m + p$, voor een $p \geq 1$, zodat het gegeven leidt tot $|s_n - s_m| < \varepsilon$. Die formule is triviaal voor $m = n$, zodat

$$|s_n - s_m| < \varepsilon \quad \text{voor } n \geq N_\varepsilon, m \geq N_\varepsilon.$$

Wegens het kenmerk van Cauchy voor rijen is de rij (s_n) convergent. □

De volgende voldoende voorwaarde leidt de convergentie van een complexe reeks af uit die van een reële reeks zonder negatieve termen.

8.3.14 Stelling (Driehoeksongelijkheid voor reeksen). *Als de reële reeks $\sum |z_n|$ convergeert, dan convergeert ook de complexe reeks $\sum z_n$, en*

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |z_n| \quad (8.3)$$

Bewijs. Zij $\sum |z_n|$ convergent. Wegens het kenmerk van Cauchy is dan

$$||z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \cdots + |z_{n+p}|| = |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \cdots + |z_{n+p}| < \varepsilon$$

als $n > N, p \geq 1$. Hieruit volgt

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| \leq |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \cdots + |z_{n+p}| < \varepsilon$$

als $n > N, p \geq 1$. Opnieuw wegens het kenmerk van Cauchy is dan $\sum z_n$ convergent. Door limietovergang $n \rightarrow +\infty$ in de driehoeksongelijkheid

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$

volgt (8.3). □

8.3.15 Definities.

1. Een reeks $\sum z_n$ waarvoor $\sum |z_n|$ convergeert noemt men **absoluut (of: volstrekt) convergent**.
2. Een reeks waarvoor $\sum z_n$ convergeert, maar $\sum |z_n|$ niet, noemt men **betrekkelijk (of: relatief) convergent**.

Betrekkelijk convergente reeksen weerspiegelen maar zeer gedeeltelijk de eigenschappen van eindige sommen. Termen *van plaats veranderen*, bijvoorbeeld, kan de som van een convergente reeks beïnvloeden. Een eenvoudig voorbeeld hiervan staat onder 8.5.3. Het goede nieuws is, dat voor *absoluut* convergente reeksen het verplaatsen van termen geen invloed heeft. Vooraf definiëren we wat dat ‘verplaatsen’ eigenlijk betekent.

8.3.16 Definitie. Twee reeksen $\sum_{n \geq 1} a_n$ en $\sum_{n \geq 1} b_n$ noemt men een **omschikking** van elkaar als er een bijjectie $\sigma: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$ bestaat met de eigenschap dat $b_n = a_{\sigma(n)}$, voor alle n .

Elke term a_n komt dus in de nieuwe reeks terecht op rangnummer $\sigma^{-1}(n)$, en elke term b_n komt in de oorspronkelijke reeks voor op rangnummer $\sigma(n)$.

8.3.17 Stelling. *Is een complexe reeks absoluut(!) convergent, dan is elke omschikking ervan eveneens absoluut convergent, en wel met de reekssom van de oorspronkelijke reeks.*

Bewijs. Zij $\sum a_n$ de oorspronkelijke absoluut convergente reeks met reekssom S , en bekijk de omschikking $\sum a_{\sigma(n)}$ (met σ een bijjectie $\mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$).

(1) We tonen aan dat $\sum |a_{\sigma(n)}|$ convergeert. Hiertoe volstaat het vast te stellen dat de partiële sommen naar boven begrensd zijn: voor elke n is

$$|a_{\sigma(1)}| + |a_{\sigma(2)}| + \cdots + |a_{\sigma(n)}| \leq \sum_{k=1}^{\max\{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| \in \mathbb{R}.$$

(2) Kies willekeurig $\varepsilon > 0$. We tonen aan dat

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)} \right| \leq \varepsilon. \quad (8.4)$$

Omdat we veronderstellen dat de reeks $\sum |a_n|$ convergent is, bestaat er (kenmerk van Cauchy) een natuurlijke N waarvoor

$$|a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots + |a_{N+p}| \leq \varepsilon, \quad \text{voor alle } p. \quad (8.5)$$

Kies nu M zo groot dat $\{1, \dots, N\} \subseteq \{\sigma(1), \dots, \sigma(M)\}$. Dan is voor $n \geq M$

$$|(a_1 + \cdots + a_n) - (a_{\sigma(1)} + \cdots + a_{\sigma(n)})| \leq |a_{N+1}| + \cdots + |a_{N+p}|$$

voor zekere p , omdat elke a_k met $k \leq N$ ook voorkomt als zekere $a_{\sigma(m)}$ met $m \leq M$, en dus beide termen uit het verschil verdwijnen. Hierdoor blijven enkel een eindig aantal termen a_k of $-a_{\sigma(m)}$ over met $k > N$ en $\sigma(m) > N$. Door (8.5) is dus

$$|(a_1 + \cdots + a_n) - (a_{\sigma(1)} + \cdots + a_{\sigma(n)})| \leq \varepsilon$$

voor elke $n \geq M$. Nemen we in deze ongelijkheid de limiet voor $n \rightarrow +\infty$, dan volgt (8.4) (vermits we uit (1) al weten dat $\sum_n a_{\sigma(n)}$ convergeert). $\square$

8.3.18 Opmerking. Deze stelling is vals voor *elke* betrekkelijk convergente reeks. Men kan aantonen dat men een gegeven betrekkelijk convergente reeks door omschikking kan doen convergeren naar om het even welke som! Zie ook voorbeeld 8.5.3.

8.4 Convergentie van reële reeksen zonder negatieve termen

8.4.1 Drie vergelijkende convergentieregels

8.4.1 Definitie. Zijn $\sum_n x_n$ en $\sum_n x'_n$ twee reële reeksen zonder negatieve termen, dan zeggen we dat de eerste reeks door de tweede **gemajoreerd** wordt, en we noteren

$$\sum_n x_n \ll \sum_n x'_n,$$

als er constante $K > 0$ en natuurlijke N bestaan waarvoor geldt dat $x_n \leq Kx'_n$ voor alle $n \geq N$. De reeks $\sum_n x'_n$ heet de **majorante**.

8.4.2 Stelling (Majorantenregel). Zij $\sum x_n$ en $\sum x'_n$ twee reële reeksen zonder negatieve termen, waarvoor $\sum_n x_n \ll \sum_n x'_n$. Als $\sum x'_n$ convergeert, dan convergeert ook $\sum x_n$.

Bewijs. Noteren we de partieelsommen van $\sum x_n$ als s_n , dan hebben we voor $n \geq N$ dat

$$\begin{aligned} s_n &= (x_1 + \cdots + x_{N-1}) + (x_N + \cdots + x_n) \\ &\leq (x_1 + \cdots + x_{N-1}) + K(x'_N + \cdots + x'_n) \leq (x_1 + \cdots + x_{N-1}) + K \sum_{n=1}^{+\infty} x'_n. \end{aligned}$$

Hieruit blijkt dat de de partieelsommen van $\sum x_n$ naar boven begrensd zijn, m.a.w. $\sum x_n$ convergeert. $\square$

8.4.3 Voorbeeld.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2^n + 1} + \cdots \ll 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Nu volgen twee praktische varianten van de majorantenregel.

8.4.4 Stelling (Quotiëntregel). Zij $\sum x_n$ en $\sum y_n$ twee reële reeksen met louter positieve termen, waarvoor

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = A \in \mathbb{R}.$$

1. als $A > 0$, dan geldt:

$$\sum x_n \text{ convergeert} \iff \sum y_n \text{ convergeert}$$

2. als $A = 0$, dan geldt:

$$\sum y_n \text{ convergeert} \implies \sum x_n \text{ convergeert}$$

Bewijs. (1) (i) Zodra n groot genoeg is hebben we $\cdots < \frac{x_n}{y_n} < A + 1$, waaruit $x_n < (A + 1)y_n$. Wegens de majorantenregel volgt uit de convergentie van $\sum y_n$ ook de convergentie van $\sum x_n$. (ii) Anderzijds hebben we ook, wegens $A \neq 0$, dat $\lim y_n/x_n = 1/A$. We kunnen dus de redenering uit (i) herhalen, met A vervangen door $1/A$ en de rollen van x_n en y_n omgewisseld. Uit de convergentie van $\sum x_n$ volgt nu dus de convergentie van $\sum y_n$.

(2) Zoals in (1)(i). (Er is geen bezwaar tegen $A = 0$, behalve dat het bewijs van de omgekeerde implicatie niet overgenomen kan worden, wegens het delen door A .) $\square$

8.4.5 Voorbeeld. Voor $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots$ en $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ is $A = 1$. Vermits de tweede reeks convergeert is dat ook voor de eerste het geval.

8.4.6 Stelling (Vergelijking van groeisnelheid). Als voor twee reeksen $\sum x_n$ en $\sum y_n$ met louter positieve termen vanaf een zeker rangnummer $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{y_{n+1}}{y_n}$ is, dan is $\sum y_n \ll \sum x_n$.

Bewijs. Stel dat $\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \geq \frac{x_n}{y_n}$ vanaf $n = N$. Voor $n > N$ hebben we dan dat $\frac{x_n}{y_n} \geq \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} \geq \dots \geq \frac{x_N}{y_N} =: A > 0$, m.a.w. $(1/A)x_n \geq y_n$. $\square$

8.4.2 Vier convergentieregels

Voor reële reeksen zonder negatieve termen bestaan een aantal convergentiekenmerken, waarin men gebruiksgemak tracht te combineren met een zo breed mogelijk toepassingsgebied. De eerste test herleidt convergentie van een bepaald type reeksen tot convergentie van integralen.

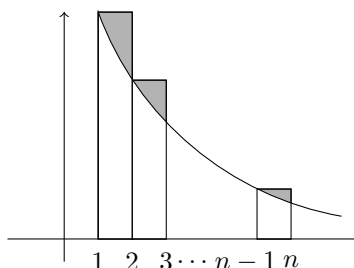
8.4.7 Stelling (Integraaltest¹¹). Zij $f : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ continu¹² en dalend. Stellen we $I_n := \int_1^n f(x) dx$ voor $n \geq 1$, dan convergeert de reeks $\sum_{n \geq 1} f(n)$ juist als de rij (I_n) convergeert.

Bewijs.

$$f(2) + f(3) + \dots + f(n) \leq \int_1^n f \leq f(1) + f(2) + \dots + f(n-1).$$

Als (I_n) convergeert, dan convergeert ook $\sum_n f(n)$ door de eerste ongelijkheid. Als $\sum_n f(n)$ convergeert, dan convergeert ook (I_n) door de tweede ongelijkheid (majorantenregel). $\square$

8.4.8 Opmerking. Uit de ongelijkheden in het bewijs volgt meer precies dat, als de convergentie geldt, noodzakelijk $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leq f(1) + \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.



Figuur 8.1: De gekleurde oppervlakte is gelijk aan $f(1) + \dots + f(n-1) - \int_1^n f$.

D.m.v. de integraaltest onderzoeken we enkele belangrijke reeksen met positieve termen.

8.4.9 Definitie. Voor elke $p \in \mathbb{R}^+$ is de **hyperharmonische reeks met exponent p** de reeks

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

De **harmonische reeks** is de hyperharmonische reeks met exponent $p = 1$, dus de reeks

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

¹¹bevat in een veel algemenere stelling van Maclaurin, 1742

¹²In feite geldt de stelling ook als men de voorwaarde ‘ f is continu’ weglaat, omdat men kan aantonen dat een dalende functie steeds integreerbaar is.

8.4.10 Stelling. De hyperharmonische reeks is convergent als $p > 1$ en is divergent naar $+\infty$ als $p \leq 1$. In het bijzonder is de harmonische reeks divergent naar $+\infty$.¹³

Bewijs. De vorige stelling is toepasbaar met $f(x) = x^{-p}$. Die functie is immers (strikt) dalend voor $x \geq 1$ (bijzonder geval van x^a met $a < 0$). Hiervoor is

$$I_n = \int_1^n \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_{x=1}^{x=n} = \frac{n^{1-p}-1}{1-p} & \text{voor } p \neq 1 \\ [\ln x]_{x=1}^{x=n} = \ln n & \text{voor } p = 1. \end{cases}$$

Uit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1-p} = \begin{cases} 0 & \text{voor } 1-p < 0 \\ +\infty & \text{voor } 1-p > 0 \end{cases}$$

en $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$ besluiten we dat de rij (I_n) convergeert juist als $p > 1$. $\square$

8.4.11 Opmerking. De divergente harmonische reeks toont aan dat de voorwaarde $z_n \rightarrow 0$ wel *nodig*, maar niet *voldoende* is voor convergentie van $\sum z_n$.

Nu voeren we een bijkomende afspraak in over bovenlimieten.

8.4.12 Definitie. Voor een reële rij (x_n) schrijven we

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$$

met de betekenis: ‘de rij (x_n) is niet naar boven begrensd’, waarbij voor het symbool $+\infty$ geldt dat $+\infty > a$ voor elke reële a , en voor het symbool $-\infty$ geldt dat $-\infty < a$ voor elke reële a .

8.4.13 Notatie. We noteren

$$[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}, \quad [-\infty, +\infty] =]-\infty, +\infty[\cup \{+\infty, -\infty\}.$$

Door deze afspraak heeft elke rij van nietnegatieve reële getallen een bovenlimiet: $+\infty$ als de rij onbegrensd is, en een reëel getal als de rij begrensd is.

Intuïtief is het idee van de nu volgende convergentieregel van Cauchy als volgt: als $x_n = r^n$ (m.a.w., $\sum x_n$ is een meetkundige reeks) met $r \geq 0$, dan wordt het convergentiegedrag van $\sum x_n$ volledig bepaald door de waarde van $r = \sqrt[n]{x_n}$. Voor willekeurige reële reeksen zonder negatieve termen kunnen we in de plaats de limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ bekijken, of meer algemeen zelfs de bovenlimiet $\overline{\lim} \sqrt[n]{x_n}$. Het voordeel om de bovenlimiet te bekijken in plaats van de limiet, is dat de bovenlimiet steeds bestaat, terwijl de limiet niet hoeft te bestaan.

8.4.14 Stelling. Zij $\sum x_n$ een reële reeks zonder negatieve termen, en noem $\lambda := \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} \in [0, +\infty]$. Dan hebben we:

1. als $\lambda < 1$, dan wordt $\sum x_n$ gemajoreerd door een convergente meetkundige reeks
2. als $\lambda > 1$, dan $x_n \not\rightarrow 0$.

¹³De divergentie van de harmonische reeks werd al aangetoond door Nicolaus van Oresme, 1350.

Bewijs. 1. Als $\lambda < 1$ kunnen we $\lambda < r < 1$ kiezen. Uit 8.1.4 volgt dat $\sqrt[n]{x_n} < r < 1$, dus $x_n < r^n$ voor alle $n \geq N$. Dit betekent dat $\sum x_n \ll \sum r^n$, met $\sum r^n$ convergent wegens $0 < r < 1$.

2. Uit het ongerijmde. Als $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, dan is zeker $x_n \leq 1 (= \varepsilon)$, en ook $\sqrt[n]{x_n} \leq 1$, voor $n \geq N$. Maar als $0 \leq \sqrt[n]{x_n} \leq 1$ voor $n \geq N$, dan $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq 1$, strijdig met het gegeven dat $\lambda > 1$. $\square$

8.4.15 Gevolg (Worteltest van Cauchy). Zij $\sum x_n$ een reële reeks zonder negatieve termen, en noem $\lambda := \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lambda \in [0, +\infty]$. Dan hebben we:

1. als $\lambda < 1$, dan convergeert $\sum x_n$
2. als $\lambda > 1$, dan divergeert $\sum x_n$ naar $+\infty$.

We kunnen een analoge regel opstellen die gebruik maakt van de groeisnelheid x_{n+1}/x_n . Als $x_n = r^n$ (m.a.w., $\sum x_n$ is een meetkundige reeks) dan is $x_{n+1}/x_n = r$. Opnieuw is het idee om voor willekeurige reële reeksen met positieve termen in de plaats de limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ te bekijken.

8.4.16 Stelling. Zij $\sum x_n$ een reële reeks met louter positieve termen waarvoor

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} =: \lambda \in [0, +\infty]$$

bestaat. Dan hebben we:

1. als $\lambda < 1$, dan wordt $\sum x_n$ gemajoreerd door een convergente meetkundige reeks
2. als $\lambda > 1$, dan $x_n \not\rightarrow 0$.

Bewijs. 1. Zij $\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow \lambda < 1$. Kiezen we $\lambda < r < 1$ dan hebben we voor $n \geq N$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq r = \frac{r^{n+1}}{r^n}.$$

Door vergelijking van groeisnelheid is dus $\sum x_n \ll \sum r^n$.

2. Zij $\lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda > 1$. Is $\lambda \in \mathbb{R}$, dan hebben we $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 (= \lambda - \varepsilon)$ zodra $n \geq N$. Is $\lambda = +\infty$ dan geldt zo'n ongelijkheid eveneens, want $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ wordt dan groter dan gelijk welk reëel getal, in het bijzonder groter dan 1. Vandaar

$$x_N < x_{N+1} < x_{N+2} < \dots$$

zodat $x_n \not\rightarrow 0$: voor $\varepsilon = x_N$ geldt zeker niet dat $x_n < \varepsilon$ voor n groot genoeg. $\square$

8.4.17 Gevolg (Convergentieregel van d'Alembert). Zij $\sum x_n$ een reële reeks met louter positieve termen waarvoor

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} =: \lambda \in [0, +\infty]$$

bestaat. Dan hebben we:

1. als $\lambda < 1$, dan convergeert $\sum x_n$

2. als $\lambda > 1$, dan *divergeert* $\sum x_n$ naar $+\infty$.

8.4.18 Opmerking. Men kan meer precies aantonen dat in de worteltest en in de regel van d'Alembert $\lambda < 1$ *als en slechts als* $\sum x_n$ gemajoreerd wordt door een convergente meetkundige reeks. Deze twee regels zijn dus eigenlijk gebruiksvriendelijke versies van *vergelijken met meetkundige reeksen*.¹⁴ I.h.b. heeft het enkel zin om de worteltest en de regel van d'Alembert beide toe te passen op een gegeven reeks als de waarde van λ voor een van de testen praktisch te moeilijk te berekenen blijkt. Uit 10.1.6 zal ook expliciet blijken dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ als deze laatste limiet bestaat: als de ene test het onbeslist geval $\lambda = 1$ oplevert, zal de andere (indien toepasbaar) dat ook doen.

Door ook te vergelijken met hyperharmonische reeksen kunnen we de convergentieregels verfijnen. Voor de praktijk volstaat het om een regel op te stellen die gebruik maakt van de groeisnelheid. Intuïtief doen we weer hetzelfde: als $x_n = 1/n^p$ (m.a.w., $\sum x_n$ is een hyperharmonische reeks), dan wordt het convergentiegedrag volledig bepaald door de waarde van p . In dat geval is

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{(n+1)^p}{n^p} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p.$$

Bekijken we voor $f(x) := x^p$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^p - 1^p}{h}$$

dan zien we dat¹⁵

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1 \right) = p \quad (8.6)$$

zodat in dit geval het convergentiegedrag bepaald wordt door

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right).$$

We tonen nu aan dat deze limiet ook voor willekeurige reële reeksen met positieve termen het convergentiegedrag bepaalt (tenzij als $p = 1$):

8.4.19 Stelling. Zij $\sum x_n$ een reële reeks met louter positieve termen, waarvoor

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) := \mu \in [-\infty, +\infty]$$

bestaat. Dan hebben we:

1. als $\mu < 1$, dan is $\sum \frac{1}{n} \ll \sum x_n$
2. als $\mu > 1$, dan wordt $\sum x_n$ gemajoreerd door een convergente hyperharmonische reeks.

Bewijs. 1. Zij $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \mu < 1$. Als $\mu \in \mathbb{R}$ dan volgt $n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) < 1 (= \mu + \varepsilon)$ voor $n \geq N$. Is $\mu = -\infty$ dan geldt zo'n ongelijkheid eveneens, want $n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right)$ wordt dan kleiner dan gelijk welk reëel getal, in het bijzonder kleiner dan 1. Deze ongelijkheid kan

¹⁴divergentie van $\sum x_n$ aantonen door te vergelijken met een divergente meetkundige reeks betekent immers aantonen dat $\sum x_n$ een majorante is voor de reeks met algemene term $1^n = 1$, i.h.b. dat $x_n \not\rightarrow 0$

¹⁵we benaderen hier in feite $(1+x)^p$ door haar Taylorbenadering van eerste orde, nl. $1+px$

herschreven worden als $\frac{x_n}{x_{n+1}} < \frac{1}{n} + 1 = \frac{n+1}{n}$ of nog als $\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{1/(n+1)}{1/n}$. Wegens vergelijking van groeisnelheid is dus $\sum \frac{1}{n} \ll \sum x_n$.

2. Zij $\lim_n n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \mu > 1$. Als $\mu \in \mathbb{R}$, dan kiezen we $1 < p < p' < \mu$, zodat

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \geq p' > 1 \quad \text{voor } n \geq N. \quad (8.7)$$

Is $\mu = +\infty$ dan geldt zo'n ongelijkheid eveneens, want $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$ wordt dan groter dan gelijk welk reëel getal, in het bijzonder groter dan een $p' > 1$. We zullen aantonen dat $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{1/(n+1)^p}{1/n^p}$ voor voldoende grote n , zodat $\sum x_n \ll \sum 1/n^p$ (vergelijkig van groeisnelheid). We hebben inderdaad door (8.7) dat

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} \geq 1 + \frac{p'}{n}.$$

Wegens (8.6) hebben we ook dat

$$n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1\right) \leq p' (= p + \varepsilon)$$

zodra n voldoende groot is, d.w.z.

$$\frac{(n+1)^p}{n^p} \leq 1 + \frac{p'}{n}$$

zodra n voldoende groot is. □

8.4.20 Gevolg (Convergentieregel van Raabe). Zij $\sum x_n$ een reële reeks met positieve termen, waarvoor

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) := \mu \in [-\infty, +\infty]$$

bestaat. Dan hebben we:

1. als $\mu < 1$, dan divergeert $\sum x_n$ naar $+\infty$
2. als $\mu > 1$, dan convergeert $\sum x_n$.

8.4.21 Opmerking. De regel van Raabe is een verfijning van de regel van d'Alembert omdat het bestaan van $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \in \mathbb{R}$ impliceert dat $\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \rightarrow 0$. We zitten dan in het onbepaald geval van de regel van d'Alembert. De regel van Raabe lost zo in de praktijk het merendeel van de twijfelgevallen op die d'Alembert overlaat.

Opnieuw kunnen we de regel van Raabe beschouwen als een gebruiksvriendelijke versie van *vergelijken met hyperharmonische reeksen*. Merk wel op dat in het onbepaald geval $\mu = 1$ vergelijken met $\sum 1/n$ een nauwkeuriger resultaat kan opleveren.

8.4.22 Opmerking. De convergentieregels voor reeksen met nietnegatieve termen kunnen ook gebruikt worden voor willekeurige complexe reeksen $\sum z_n$, door ze toe te passen op $\sum |z_n|$. Merk in dit verband op dat de worteltest en de regel van d'Alembert ook toelaten te besluiten dat $\sum z_n$ niet convergeert: $\lambda > 1$ impliceert immers dat $z_n \not\rightarrow 0$, want

$$(z_n \rightarrow 0) \iff (|z_n| \rightarrow 0) \iff (|z_n| < \varepsilon \text{ zodra } n \geq N_\varepsilon).$$

De regel van Raabe laat daarentegen enkel toe te besluiten dat $\sum z_n$ niet absoluut convergeert. In 8.5.4 wordt een voorbeeld gegeven van een betrekkelijk convergente reeks $\sum z_n$ waarvoor

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\left| \frac{z_n}{z_{n+1}} \right| - 1 \right) < 1.$$

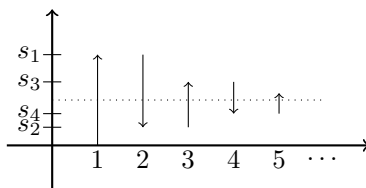
8.5 Convergentie van reële wisselreeksen

8.5.1 Definitie. Een **wisselreeks** is een reële reeks waarvan de termen afwisselend positief en negatief zijn.

Voor wisselreeksen van een bijzonder (maar vaak voorkomend) type bestaat de volgende zeer praktische convergentieregel.

8.5.2 Stelling (Voldoende voorwaarde van Leibniz, 1714). *Zij $p_1 > p_2 > p_3 > \dots$ een strikt dalende rij van positieve getallen, met $p_n \rightarrow 0$. Dan hebben we:*

1. *de wisselreeks $p_1 - p_2 + p_3 - \dots$ convergeert*
2. *de reekssom ligt tussen elk tweetal opeenvolgende partieelsommen.*



Figuur 8.2: Partieelsommen van een wisselreeks, afwisselend boven en onder de reekssom.

Bewijs. 1. Uit

$$s_2 = p_1 - p_2, \quad s_4 = (p_1 - p_2) + \underbrace{(p_3 - p_4)}_{>0} > s_2, \quad \dots$$

volgt dat de rij $s_2, s_4, s_6, \dots$ strikt stijgend is. Analoog is

$$s_1 = p_1, \quad s_3 = p_1 - \underbrace{(p_2 - p_3)}_{>0} < s_1, \quad \dots$$

zodat de rij $s_1, s_3, s_5, s_7, \dots$ strikt dalend is.

Verder is $s_{2n} \leq s_{2n+1}$, zodat $s_{2n+1} \geq s_{2n} \geq s_2$ en $s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq s_1$ voor elke n .

De rij $s_2, s_4, s_6, \dots$ is dus strikt stijgend en naar boven begrensd (door s_1). Daardoor bestaat $S_e := \lim_n s_{2n} = \sup_n s_{2n}$.

Analoog is de rij $s_1, s_3, s_5, s_7, \dots$ strikt dalend en naar onder begrensd (door s_2), zodat ook $S_o := \lim_n s_{2n+1} = \inf_n s_{2n+1}$ bestaat.

We hebben $S_e = S_o$, want

$$S_o - S_e = \lim_n s_{2n+1} - \lim_n s_{2n} = \lim_n (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_n p_{2n+1} = 0.$$

Noteren we $S := S_e = S_o$, dan geldt dus

$$|S - s_k| < \varepsilon \quad \text{zodra } k > N_\varepsilon,$$

m.a.w. $p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + \dots = S$.

2. Uit 1. weten we dat $S_e = S$ groter is dan elke partiëlesom met een even aantal termen, en dat $S_o = S$ kleiner is dan elke partiëlesom met een oneven aantal termen. Vandaar

$$s_2 < S < s_1, \quad s_4 < S < s_3, \quad s_6 < S < s_5, \dots$$

□

8.5.3 Voorbeeld. We bekijken de som S van de z.g. *harmonische wisselreeks*, waarvan de convergentie onmiddellijk uit de voorwaarde van Leibniz volgt (in (10.2) zal blijken dat $S = \ln 2$):

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \\ \frac{S}{2} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots \end{aligned}$$

Tellen we beide leden lid aan lid op, dan vinden we (door lineariteit van reeksen¹⁶)

$$\begin{aligned} \frac{3S}{2} &= 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{2}{8} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots \end{aligned}$$

hetgeen een omschikking is van de oorspronkelijke reeks! Een omschikking van een relatief convergente reeks heeft dus niet noodzakelijk dezelfde reekssom als de oorspronkelijke reeks.

8.5.4 Voorbeeld. Voor de wisselreeks

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots$$

is

$$\lim_n n \left(\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| - 1 \right) = \frac{1}{2} < 1$$

zodat de regel van Raabe ‘geen absolute convergentie’ voorspelt. Toch is deze reeks wel dege-lijk (betrekkelijk) convergent. Dat volgt uit de voldoende voorwaarde van Leibniz: blijkbaar is

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} > \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} > \dots$$

Verder is

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \rightarrow 0$$

want voor alle $x > 0$ is $\ln x \leq x - 1$, zodat

$$\ln \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \right) = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{3}{4} + \dots + \ln \frac{2n-1}{2n} \leq -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2n} \rightarrow -\infty.$$

¹⁶de tweede reeks convergeert ook naar $S/2$ als we tussen elke twee termen een extra term 0 tussenvoegen

8.6 Oefeningen

1. Bereken boven- en onderlimiet van de volgende rijen (a, b constant):

$$\begin{aligned} (1) x_n &= n & (2) x_n &= a + n^{(-1)^n} & (3) a, b, a, b, a, \dots \quad (a < b) & (4) x_n &= a + \frac{(-1)^n}{n} \\ (5) x_n &= (-1)^n & (6) x_n &= a - n^{(-1)^n} & (7) x_n &= -n & (8) x_n &= (-1)^n(1 + 1/n) \\ (9) x_n &= n^2 \sin^2 \frac{n\pi}{2} & (10) & 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots \end{aligned}$$

2. Bewijs dat voor een nietnegatieve rij $\overline{\lim} x_n = 0 \iff x_n \rightarrow 0$.

3. Bereken

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n^2(n+1)^2} \quad (3) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n-3}{n^3-4n} \quad (4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \text{ wetende dat } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}.$$

4. Ga de convergentie na van de volgende reeksen:

$$\begin{aligned} (1) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n} & \quad (2) \sum_{n \geq 0} \frac{1+n}{1+n^2} & (3) \sum_{n \geq 1} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} & \quad (4) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{3^n} & (5) \sum_{n \geq 1} \frac{(\frac{n+1}{3})^{n^2}}{n} \\ (6) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2-4n+5} & \quad (7) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} & (8) \sum_{n \geq 1} \frac{n}{2n-1} & \quad (9) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)} \\ (10) \sum_{n \geq 0} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}{(n+1)!} x^n \quad (x > 0) & \quad (11) \sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} & \quad (12) \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n + \ln n} \\ (13) \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{x(x+1) \cdots (x+n-1)} \quad (x > 0) & \quad (14) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!+1} & \quad (15) \sum_{n \geq 1} \sin \frac{1}{n} \\ (16) \sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{n+2}{n} \right) & \quad (17) \sum_{n \geq 1} \cos^n \frac{n\pi}{8n+1} & \quad (18) \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} & \quad (19) \sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^k}{(kn)!} \quad (k \in \mathbb{N}^+) \\ (20) \sum_{n \geq 3} \frac{n}{(n^2-n-1) \ln n (\ln(\ln n))^a} & \quad (a \text{ constant}) & \quad (21) \sum_{n \geq 1} \frac{\cos^2 n}{n}. \end{aligned}$$

[Aanwijzing: indien convergent, dan ook $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos^2 2n}{2n}$ en de minorante $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2 n \cos^2 n}{n}$, bijgevolg ook $\sum_n \frac{1}{2n}$.]

5. Onderzoek de convergentie (absoluut en betrekkelijk) van de volgende reeksen:

$$\begin{aligned} (1) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)} & \quad (2) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n - \ln n} & (3) \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt[n]{2}}{n} x^n \quad (x \in \mathbb{R}) & \quad (4) \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n^2}}{n!} \quad (x \in \mathbb{R}) \\ (5) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{nx^{2n}} \quad (x \neq 0) & \quad (6) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x(x+1) \cdots (x+n-1)}{n!} \quad (x > 0) \\ (7) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2 3^n} (x+2)^n \quad (x \in \mathbb{R}) & \quad (8) \sum_{n \geq 1} \sin \left(n\pi + \frac{1}{n} \right) & \quad (9) \sum_{n \geq 1} \sin \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

6. Stel $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ en $b_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{(n+2) \ln(n+2)}$ ($n \geq 1$). Toon dan aan dat

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_n}{a_n} \right| = 1 \quad (2) \sum a_n \text{ convergeert} \quad (3) \sum b_n \text{ divergeert}.$$

7. Gegeven: de reeks $\sum_n x_n$ is convergent, en voor elke n is $0 < x_n \neq 1$.

(a) Bewijs dat $\sum_n (x_n)^2$ eveneens convergent is.

(b) Bewijs dat $\sum_n \frac{x_n}{1-x_n}$ convergeert of bewijs dat ze niet convergeert.

Hoofdstuk 9

Gelijkmatige convergentie

9.1 Gelijkmatige convergentie van rijen van functies $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

9.1.1 Definitie. Zij $A \subseteq \mathbb{C}$, en zij $f_1, f_2, \dots$ een rij van complexwaardige functies, elk hiervan met een domein D_n dat A omvat. Men zegt dat deze rij **(puntsgewijs) convergeert** naar f (zelf een functie $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ met domein $D \supseteq A$) als voor elke $z \in A$ de getallenrij $f_1(z), f_2(z), \dots$ naar $f(z)$ convergeert, dus als

$$(\forall z \in A)(f_n(z) \rightarrow f(z)),$$

voluit geschreven

$$(\forall z \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_{z,\varepsilon} \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq N_{z,\varepsilon} \implies |f(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon).$$

Een korte notatie hiervoor is: $f_n \xrightarrow{A} f$.

9.1.2 Voorbeeld. Als $f_n(x) := \arctan nx$ ($x \in \mathbb{R}$), dan $f_n \xrightarrow{\mathbb{R}} f$, met

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ \frac{\pi}{2} & (x > 0). \end{cases}$$

Bemerk dat elke f_n continu is over $\mathbb{R}$, maar dat f dat niet is.

Bij puntsgewijze convergentie kan de bij een $\varepsilon > 0$ horende N , zoals uit de notatie $N_{z,\varepsilon}$ blijkt, voor elke z anders zijn. Men kan deze definitie verstrengen door te eisen dat er, bij een gegeven ε , een N moet bestaan *die dezelfde is voor alle z in A* . Dit leidt tot de formule

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq N_\varepsilon \implies |f(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon), \quad (9.1)$$

waarvoor de notatie $f_n \xrightarrow{A} f$ in gebruik is. De notatie N_ε weerspiegelt het feit dat deze N wel van ε afhangt, maar niet van z .

9.1.3 Definitie. Als (9.1) geldt, zegt men dat de rij $f_1, f_2, \dots$ over A **gelijkmatig/uniform** convergeert naar f .

Als een rij van functies gelijkmatig convergeert, dan convergeert ze ook puntsgewijs.

We kunnen gelijkmatige convergentie ook iets bondiger formuleren:

9.1.4 Stelling. $f_n \xrightarrow{A} f$ juist als $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in A} |f(z) - f_n(z)| = 0$.

Bewijs. (9.1) is gelijkwaardig met

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon) \underbrace{(\forall z \in A)(|f(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon)}_{\iff \sup_{z \in A} |f(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon}$$

en dit is juist de definitie van $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in A} |f(z) - f_n(z)| = 0$. $\square$

9.1.5 Voorbeelden.

1. Als $f_n(x) = \arctan nx$ en $f(x) := \lim_n f_n(x)$, dan is $\sup_{x > 0} |f(x) - f_n(x)| = \frac{\pi}{2} \not\rightarrow 0$. De convergentie is niet gelijkmatig.
2. Als $f_n(x) = x + 1/n$, dan is $\lim_n f_n(x) = x$ en is $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - x| = 1/n \rightarrow 0$. De convergentie is gelijkmatig.

Zoals in voorbeeld 9.1.5.1 zijn er veel convergente rijen van functies die niet *gelijkmatig* convergeren. Voorbeeld 9.1.2 toont ook aan dat puntsgewijze convergentie van een rij van continue functies niet sterk genoeg is om een continue limietfunctie te garanderen. We tonen nu aan dat gelijkmatige convergentie dat wél doet. We beschouwen hierbij enkel functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gedefinieerd over een interval $[a, b]$.

9.1.6 Stelling (Overdracht van continuïteit). *Veronderstel dat $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu zijn in $x_0 \in [a, b]$ en $f_n \xrightarrow{[a, b]} f$ voor zekere $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dan is ook f continu in x_0 .*

Bewijs. Kies willekeurig $\varepsilon > 0$. Wegens $f_n \xrightarrow{[a, b]} f$ bestaat er een N_ε waarvoor geldt

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3 \quad \text{als } n \geq N \text{ en } a \leq x \leq b.$$

Doordat f_N continu is in x_0 bestaat er een $\delta > 0$ waarvoor

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3 \quad \text{als } |x - x_0| < \delta \text{ en } a \leq x \leq b.$$

Voor zo'n x geldt dan dat

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

en dit toont aan dat f continu is in x_0 . $\square$

9.1.7 Opmerking. Als f gedefinieerd is op een groter domein dan $[a, b]$, dan volgt uit de vorige stelling enkel dat $f/[a, b]$ continu is in x_0 , m.a.w. in eindpunten is alleen eenzijdige continuïteit gegarandeerd.

Bijzonder veel gebruikt is de volgende toepassing van gelijkmatige convergentie.

9.1.8 Stelling (Omwisselen van limiet en integraal). Zij $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$, met elke f_n continu over $[a, b]$. Dan is

$$\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f, \quad \text{of m.a.w.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n. \quad (9.2)$$

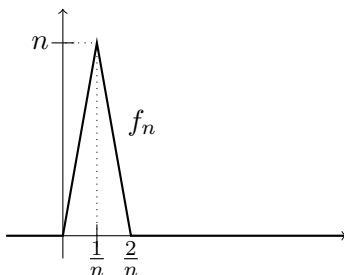
Bewijs. Vooreerst volgt uit de voorafgaande stelling dat $f := \lim_n f_n$ continu en dus integreerbaar is over $[a, b]$. Verder is

$$(0 \leq) \left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \sup_{z \in [a,b]} |f_n - f|(b-a).$$

Door de veronderstelde gelijkmatige convergentie nadert het rechterlid, en dus ook het linkerlid naar 0 als $n \rightarrow \infty$. $\square$

Weet men enkel dat $f_n \rightarrow f$ puntsgewijs op $[a, b]$, dan kan men niet zomaar limiet en integraal verwisselen:

9.1.9 Voorbeeld. Voor de functies f_n uit Figuur 9.1 is $\lim_n f_n = 0$, zodat $\int_0^1 \lim_n f_n = 0$. Anderzijds is $\int_0^1 f_n = 1$ voor elke $n \geq 2$, zodat $\lim_n \int_0^1 f_n = 1$. De convergentie is niet gelijkmatig.



Figuur 9.1: $\lim_n \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 \lim f_n$

Een eerste gevolg van 9.1.8 is:

9.1.10 Gevolg (Omwisselen van limiet en afgeleide). Veronderstel dat f_n continu afleidbaar zijn op $]a, b[$, dat $(f'_n)_n$ gelijkmatig convergeert over elk gesloten deelinterval van $]a, b[$ en dat $(f_n(x_0))_n$ convergeert voor zekere $x_0 \in]a, b[$. Dan convergeert ook de rij $(f_n)_n$ op $]a, b[$ en

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x), \quad \forall x \in]a, b[.$$

Bewijs. Noem $g := \lim_n f'_n$ en zij $x \in]a, b[$ met $x \geq x_0$ (analoog voor $x \leq x_0$). Door de gelijkmatige convergentie is g continu op $[x_0, x]$ en is

$$\int_{x_0}^x g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(x_0))$$

door de Tweede hoofdstelling. Omdat $f_n(x_0) \rightarrow c$ voor zekere $c \in \mathbb{R}$, is dus ook $f_n(x) \rightarrow c + \int_{x_0}^x g$. Door de Eerste hoofdstelling is dus $(\lim_n f_n(x))' = g(x)$ voor alle $x \in]a, b[$. $\square$

9.1.11 Voorbeeld. De rij $f_n(x) := \frac{1}{n} \sin(n^2 x)$ convergeert gelijkmatig naar 0 op heel $\mathbb{R}$. Toch convergeert $f'_n(x) = \cos(n^2 x)$ niet (bijv. in $x = 0$ is de rij divergent naar $+\infty$). Om te besluiten dat $(f'_n)_n$ convergeert op $]a, b[$, volstaat het dus niet dat $f_n \in C^1([a, b])$ voor elke n en dat $(f_n)_n$ gelijkmatig convergeert.

9.2 Gelijkmatige convergentie van reeksen van functies $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

Zij $A \subseteq \mathbb{C}$, en zij $f_1, f_2, \dots$ een rij van complexwaardige functies, elk hiervan met een domein D_n dat A omvat.

Met deze rij bouwt men de opeenvolgende partieelsommen over I op: $s_1 = f_1$, $s_2 = f_1 + f_2$, enz. Elke s_n is een over A gedefinieerde functie, en de rij $s_1, s_2, \dots$ definieert men als de reeks $\sum_{n \geq 1} f_n$.

9.2.1 Definitie. Men zegt dat de reeks $\sum f_n$ over A (**puntsgewijze**) **convergeert** naar de reekssom f (zelf een functie met domein $D \supseteq A$) als $s_n \xrightarrow{A} f$. Men noteert dan

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \quad \text{over } A.$$

9.2.2 Definitie. Als $s_n \xrightarrow{A} f$, dan zegt men dat de reeks $\sum f_n$ over A **gelijkmatig** of **uniform** naar de reekssom f convergeert.

Er is voor dit begrip geen bijzondere notatie; de toevoeging ‘gelijkmatig’ moet in de context gegeven worden. Men schrijft b.v.

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \quad \text{gelijkmatig over } A.$$

Voor de overdracht van continuïteit en het omwisselen van limiet en integraal beschouwen we enkel functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gedefinieerd over een interval $[a, b]$. Omdat de convergentie van de reeks $\sum_{n \geq 1} f_n$ bij definitie de convergentie van de rij $s_1, s_2, \dots$ is, hebben we onmiddellijk

9.2.3 Stelling (Overdracht van continuïteit). Zij $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ gelijkmatig over $[a, b]$, waarbij $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu zijn in $x_0 \in [a, b]$. Dan is ook $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu in x_0 .

9.2.4 Stelling (Omwisselen van reeks en integraal). Zij $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ gelijkmatig over $[a, b]$, waarbij elke f_n continu is over $[a, b]$. Dan is

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \right).$$

9.2.5 Stelling (Omwisselen van reeks en afgeleide). Veronderstel dat f_n continu afleidend zijn op $]a, b[$, dat $\sum f'_n$ gelijkmatig convergeert over elk gesloten deelinterval van $]a, b[$ en dat $\sum f_n(x_0)$ convergeert voor zekere $x_0 \in]a, b[$. Dan convergeert ook $\sum f_n$ op $]a, b[$ en

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x), \quad \forall x \in]a, b[.$$

Gelukkig bestaat er voor gelijkmatige convergentie van *reeksen* (niet *rijen*) een bijzonder praktische voldoende voorwaarde, de z.g. **M-test van Weierstrass**. Met het oog op verdere toepassing geven we deze regel voor functies $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

9.2.6 Stelling (M-test van Weierstrass). *Zij $\sum f_n$ een reeks van functies $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, alle gedefinieerd over $A \subseteq \mathbb{C}$. Als er een rij (a_n) van nietnegatieve getallen bestaat waarvoor geldt:*

1. $|f_n(z)| \leq a_n$ voor alle $n \geq 1$ en $z \in A$

2. $\sum a_n$ convergeert,

dan is de reeks $\sum f_n$ gelijkmatig convergent over A .

Bewijs. De majorantenregel leert natuurlijk onmiddellijk dat $\sum |f_n(z)|$ voor elke $z \in A$ convergent is, d.w.z. dat de reeks $\sum f_n$ over A absoluut convergeert. Stel $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ voor $z \in A$. Dan is

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^n f_k(z) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k, \quad \forall z \in A.$$

Bijgevolg is ook

$$\sup_{z \in A} \left| f(z) - \sum_{k=1}^n f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k - \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

□

Hoofdstuk 10

Machtreeksen

10.1 Convergentie

10.1.1 Definitie. Een **machtreeks** is een reeks van functies die de vorm $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ heeft, met $a_0, a_1, \dots$ complexe constanten. Hierbij is kortweg z^n genoteerd voor de afbeelding $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto z^n$.

De (reeks) som van een) machtreeks is dus een functie $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Als we haar domein beperken tot een deel van de reële rechte, dan verkrijgen we een functie $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. We zullen dat in de notatie duidelijk maken door de veranderlijke dan als x te noteren i.p.v. z .

Vergeleken met algemene reeksen van functies vertoont dit bijzonder soort van reeksen een merkwaardig convergentiegedrag: laat men randpunten buiten beschouwing, dan vallen ‘convergentie’ en ‘absolute convergentie’ samen, en vormen de punten van convergentie een schijf in het complexe vlak.

10.1.2 Definitie. De **convergentiestraal** van de machtreeks $\sum a_n z^n$ is gedefinieerd door

$$R := \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty] \quad (10.1)$$

waarin de afspraak geldt dat $R = +\infty$ als de noemer 0 is, en $R = 0$ als de noemer $+\infty$ is (wat kan gebeuren, zie definitie 8.4.12).

10.1.3 Stelling.

1. Als $R = 0$, dan convergeert $\sum a_n z^n$ enkel voor $z = 0$.
2. Als $0 < R < +\infty$, dan convergeert $\sum a_n z^n$ absoluut voor $|z| < R$ en convergeert niet voor $|z| > R$.
3. Als $R = +\infty$, dan convergeert $\sum a_n z^n$ absoluut over geheel $\mathbb{C}$.

Bewijs. Als $z = 0$, dan convergeert de reeks triviaal naar 0. We beperken ons dus verder tot het geval $z \neq 0$. Dan leert de worteltest: als

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \cdot \underbrace{\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}_{=1/R} \begin{cases} < 1, & \text{dan is } \sum a_n z^n \text{ absoluut conv.} \\ > 1, & \text{dan is } \sum a_n z^n \text{ niet conv. } (a_n z^n \not\rightarrow 0). \end{cases}$$

(Merk op: ook als $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ en $c > 0$, is $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (cx_n) = c \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n (= +\infty)$.)
D.w.z.: als $|z| < R$ (inclusief het geval $R = +\infty$), dan convergeert $\sum a_n z^n$ absoluut. Als $|z| > R$ (inclusief het geval $R = 0$), dan convergeert $\sum a_n z^n$ niet. $\square$

10.1.4 Definitie. De **convergentieschijf** is de open schijf $B(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, met de afspraak dat $B(0, +\infty) := \mathbb{C}$. De **convergentiecirkel** is de cirkel $|z| = R$. Voor $\sum a_n x^n$ ($x \in \mathbb{R}$) herleidt de convergentieschijf zich tot het **convergentie-interval** $] -R, R[$ ($= \mathbb{R}$ als $R = +\infty$).

10.1.5 Opmerking. $B(0, 0) = \emptyset$, hoewel $\sum_n a_n z^n$ convergeert voor $z = 0$.

Het convergentiegedrag van een machtreeks is samen te vatten als: *absoluut convergent binnen de convergentiecirkel, niet-convergent erbuiten*. In punten op de convergentiecirkel kan de reeks al dan niet convergeren, afhankelijk van reeks tot reeks en van punt tot punt.

De nu volgende regel is in de praktijk veelal voldoende om de convergentiestraal te bepalen.

10.1.6 Stelling. Als $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \rho \in [0, +\infty]$, dan is ρ de convergentiestraal van $\sum a_n z^n$.

Bewijs. Neem eerst aan dat $\rho \in \mathbb{R}^+$. Wegens de convergentieregel van d'Alembert is $\sum a_n z^n$ absoluut convergent als $|z| < \rho$, want dan is

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = |z| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|z|}{\rho} < 1$$

en niet convergent als $|z| > \rho$. Het getal ρ bepaalt dus de scheiding tussen absolute convergentie (nl. voor punten met kleinere absolute waarde) en niet-convergentie (nl. voor punten met grotere absolute waarde). Bijgevolg is ρ de convergentiestraal.

Als $\rho = +\infty$, dan is $\sum_n |a_n z^n|$ voor elke z convergent, want de regel van d'Alembert levert een limiet $\lambda = 0$ op. Bijgevolg is de convergentieschijf het hele vlak, en $R = +\infty$.

Als $\rho = 0$, dan is $R = 0$. Inderdaad, uit $R > 0$ zou volgen dat $\sum_n a_n z^n$ binnen $B(0, R)$ absoluut convergent is, en dat is niet het geval: de regel van d'Alembert levert voor elke $z \neq 0$ een limiet $\lambda = +\infty$ op. $\square$

De volgende stelling geeft enkele praktische schattingen voor de convergentiestraal. De vuistregel is: *hoe kleiner de coëfficiënten, hoe groter de convergentiestraal*.

10.1.7 Stelling.

1. Als de coëfficiëntenrij (a_n) begrensd is, dan is $R \geq 1$.
2. Als $a_n \not\rightarrow 0$ (in het bijzonder als de rij (a_n) onbegrensd is) dan is $R \leq 1$.
3. Als (a_n) begrensd is en $a_n \not\rightarrow 0$ dan is $R = 1$.

Bewijs. 1. Als $|a_n| \leq M$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, dan $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{M}$ en dus

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{M} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{M} = M^0 = 1,$$

waaruit $R \geq 1$.

2. Uit $R > 1$, m.a.w. $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, zou volgen dat $\sum |a_n|$ convergeert (worteltest), en hieruit dat $a_n \rightarrow 0$.

3. Combinatie van 1. en 2. $\square$

10.2 Termsgewijs integreren en afleiden van machtreeksen

De meetkundige reeks is een machtreeks waarvan we de reekssom expliciet kennen (zie 8.3.9):

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots \quad (-1 < x < 1)$$

en dus ook

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots \quad (-1 < x < 1).$$

Wegens 10.1.7.3 is $R = 1$. In geen van beide gevallen is er convergentie in de eindpunten van het convergentie-interval, want in die punten nadert de algemene term niet naar nul.

We zullen meteen aantonen (10.2.4) dat machtreeksen binnen hun convergentie-interval termsgewijs geïntegreerd mogen worden. Dit heeft een aantal interessante gevolgen. Uit

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x \quad (x \in \mathbb{R})$$

volgt dan immers dat

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

en uit

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x) \quad (x > -1)$$

volgt

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

Deze ontwikkelingen geven een manier om de numerieke waarden van $\arctan x$ en $\ln x$ efficiënt te berekenen.¹

Op analoge wijze verkrijgt men door termsgewijze integratie de Taylorontwikkeling

$$\operatorname{argtanh} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \quad (-1 < x < 1).$$

De reeks voor $\ln(1+x)$ convergeert ook voor $x = 1$ (voldoende voorwaarde van Leibniz). Uit de limietstelling van Abel (10.4.4) zal volgen dat ze convergeert naar $\lim_{x \rightarrow 1-} \ln(1+x) = \ln 2$. Vandaar

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad (10.2)$$

De reeks voor $\arctan x$ convergeert ook voor $x = 1$ en $x = -1$. Wegens dezelfde stelling (10.4.4) volgt voor $x = 1$ de z.g. **reeks van Leibniz**²

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

¹Wegens $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ en $\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ ($x > 0$) volstaat het om de waarden te kennen voor $0 < x \leq 1$. Er volgen ook een aantal ongelijkheden uit, zoals $x - \frac{x^3}{3} < \arctan x < x$ ($0 < x < 1$), zie 8.5.2.

²Gregory, 1671. Leibniz schreef er de toevoeging bij *God schept genoeg in oneven getallen*, een citaat uit Vergilius, Ecloga VIII, 75.

10.2.1 Stelling. Een complexe machtreeks convergeert gelijkmatig over elke gesloten schijf met de oorsprong als middelpunt en een straal die kleiner is dan de convergentiestraal.

Bewijs. Neem $0 < R' < R$, en beschouw de gesloten bal $\overline{B} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R'\}$. Dan hebben we

$$|a_n z^n| \leq |a_n R'^n|, \quad (z \in \overline{B}, n = 0, 1, \dots).$$

Omdat het punt R' binnen de convergentieschijf ligt, is de reële reeks $\sum |a_n R'^n|$ convergent. Door de M-test van Weierstrass besluiten we de gelijkmatige convergentie over $\overline{B}$. $\square$

10.2.2 Definitie. De machtreeks $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ heeft als **termsgewijs geïntegreerde (machtreeks)** de machtreeks $\sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$, en als **termsgewijs afgeleide (machtreeks)** de machtreeks $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$.

We gaan eerst na waar die termsgewijs geïntegreerde/afgeleide reeks convergeert:

10.2.3 Stelling. Een complexe machtreeks en haar termsgewijs geïntegreerde/afgeleide hebben dezelfde convergentiestraal.

Bewijs. We bepalen eerst de convergentiestraal van de termsgewijs afgeleide $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$. Het rekenwerk wordt gemakkelijk als we dat doen voor de machtreeks $\sum_{n \geq 1} n a_n z^n$. De convergentiestraal is voor beide reeksen dezelfde: in een punt z waar de ene convergent is, zal de andere dat ook zijn (deel door of vermenigvuldig met $|z|$, het geval $z = 0$ is triviaal). Wegens $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ is

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{(\ln n)/n} = e^0 = 1.$$

Gebruiken we deze limiet en de eigenschap 8.1.7.6, dan vinden we

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} \right) \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right) = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

m.a.w.: de machtreeksen $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ en $\sum_{n \geq 0} n a_n z^n = \sum_{n \geq 1} n a_n z^n$ (en dus ook $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$) hebben dezelfde convergentiestraal.

Omdat de termsgewijs afgeleide van de termsgewijs geïntegreerde reeks opnieuw de oorspronkelijke machtreeks is, heeft ook de termsgewijs geïntegreerde dezelfde convergentiestraal. $\square$

We tonen nu aan dat de termsgewijs geïntegreerde (resp. afgeleide) reeks convergeert naar de geïntegreerde (resp. afgeleide) van de oorspronkelijke reekssom. We beperken ons hierbij tot een reële veranderlijke, omdat we hier geen integralen of afgeleiden wensen in te voeren voor functies van een complexe veranderlijke. We spreken wel af dat voor een functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f' := (\operatorname{Re} f)' + i(\operatorname{Im} f)' \quad \text{en} \quad \int_a^b f := \int_a^b \operatorname{Re} f + i \int_a^b \operatorname{Im} f,$$

waarbij

$$\operatorname{Re} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (\operatorname{Re} f)(x) := \operatorname{Re}(f(x)) \quad \text{en} \quad (\operatorname{Im} f)(x) := \operatorname{Im}(f(x)).$$

Hierdoor blijven de meeste eigenschappen van integralen en afgeleiden van functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gelden voor functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, nl. door ze op het reëel en imaginair deel toe te passen.

10.2.4 Stelling. Veronderstel dat de machtreeks $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ een convergentiestraal $R \in \mathbb{R}^+$ heeft, en stel $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ voor $-R < x < R$. Dan is voor elke $x \in]-R, R[$

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{en} \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Bewijs. Kies $x \in]-R, R[$ vast. Dan convergeert $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ gelijkmatig over $[-|x|, |x|]$. Daardoor mogen we reeks en integraal verwisselen, zodat

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Door 10.2.3 convergeert de termsgewijs afgeleide reeks gelijkmatig over elk gesloten deelinterval van $]-R, R[$. Bijgevolg mogen we reeks en afgeleide verwisselen. $\square$

10.2.5 Opmerking. Als $R = +\infty$, dan geldt deze eigenschap over heel $\mathbb{R}$.

10.2.6 Gevolgen.

1. Is $R \in \mathbb{R}^+$, dan is (de reekssom van) een machtreeks op $]-R, R[$ onbepaald afleidbaar, en de opeenvolgende afleidingen mogen termsgewijs uitgevoerd worden.
2. Als $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ voor $-R < x < R$, dan is

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (10.3)$$

3. Als er een $\varepsilon > 0$ bestaat waarvoor

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \quad (-\varepsilon < x < \varepsilon),$$

dan is $a_n = b_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. (**Enigheid van machtreeksen.**)

Bewijs. 1. Pas de stelling achtereenvolgens toe op $f', f'', \dots$

2. Voor $-R < x < R$ hebben we

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \\ f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots \\ f''(x) &= 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \dots, \end{aligned}$$

algemeen

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)\dots 2 \cdot 1 a_n + \dots$$

zodat

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 2a_2, \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = n! a_n, \quad \dots$$

(Bij afspraak is $0! = 1$.)

3. $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = b_n$ voor $n = 0, 1, 2, \dots$ $\square$

10.2.7 Opmerking.

Als $R = +\infty$, dan gelden de eigenschappen uit 10.2.6.1 over heel $\mathbb{R}$.

10.3 Taylorontwikkeling

10.3.1 Definitie. Als $U \ni x_0$ een open interval is, en als

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \cdots \quad (x \in U) \quad (10.4)$$

dan noemt men het rechterlid de **Taylorontwikkeling³ met centraal punt x_0** (of kortweg: **rond x_0**) van f over U . In het merendeel van de gevallen is $x_0 = 0$, en herleidt (10.4) zich tot

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \quad (x \in U). \quad (10.5)$$

Wegens 10.2.6 kunnen de coëfficiënten hierin niets anders zijn dan $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (en in (10.4) $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$). Maar uit voorbeelden blijkt dat het kan gebeuren dat de reeks

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

in sommige punten x ofwel niet convergeert ofwel naar een som convergeert die niet $f(x)$ is!

10.3.1 Taylorontwikkelingen afgeleid door voldoende voorwaarden

We geven vooreerst een benadering met een *eindig* aantal termen, die men *formule van Taylor* noemt. Het is een verfijning van de Tweede Hoofdstelling voor functies die meer dan glad (C^1) zijn.

10.3.2 Stelling (Taylorformule met integraalgedaante van de restterm). *Is f van de klasse C^n ($n \geq 1$) over het open interval $U \ni x_0$, dan is voor elke $x \in U$*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2!} + \cdots + (x - x_0)^{n-1} \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt. \quad (10.6)$$

Bewijs. We moeten bewijzen dat

$$\text{als } f \in C^1(U): \quad f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt \quad (10.7)$$

$$\text{als } f \in C^2(U): \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t) dt \quad (10.8)$$

$$\text{als } f \in C^3(U): \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2!} + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) dt \quad (10.9)$$

enzovoort.

³naar Taylor, 1715. De formule was al bekend aan Gregory, 1668. Vrijwel alle ontwikkelingen die wij zullen geven werden (her)ontdekt door Newton. De Hindoewiskundige Madhava kende de reeks voor arctan al 250 jaar voor Newton!

1. Formule (10.7) is triviaal als $x = x_0$, en is niets anders dan de Tweede Hoofdstelling als $x_0 < x$. Als $x < x_0$, dan volgt, door de rollen van x en x_0 om te wisselen, dat

$$f(x_0) = f(x) + \int_x^{x_0} f'(t) dt,$$

waaruit

$$f(x) = f(x_0) - \int_x^{x_0} f'(t) dt = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt.$$

Formule (10.7) is dus geldig voor alle keuzen van x_0, x in U .

2. Formule (10.7) kunnen we herschrijven als (het accent duidt afleiding naar t aan)

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)(t-x)' dt.$$

Als $f \in C^2(U)$, dan is $f' \in C^1(U)$ en kunnen we door partiële integratie vervolgen met

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + [f'(t)(t-x)]_{t=x_0}^{t=x} - \int_{x_0}^x (t-x)f''(t) dt \\ &= f(x_0) + 0 - f'(x_0)(x_0-x) + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t) dt \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t) dt. \end{aligned}$$

Dit is formule (10.8). Zij is, zoals ons uitgangspunt (10.7), voor alle keuzen van x_0, x in U geldig.

3. Formule (10.8) kunnen we herschrijven als (het accent duidt afleiding naar t aan; x is vast)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \int_{x_0}^x \left(\frac{(x-t)^2}{2} \right)' f''(t) dt.$$

Als $f \in C^3(U)$, dan is $f'' \in C^1(U)$ en kunnen we door partiële integratie vervolgen met

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \left[\frac{(x-t)^2}{2} f''(t) \right]_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t) dt \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - 0 + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) dt \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) dt. \end{aligned}$$

Dit is formule (10.9). Zij is, zoals ons uitgangspunt (10.8), voor alle keuzen van x_0, x in U geldig. Het algemeen bewijs volgt door inductie. $\square$

10.3.3 Stelling (Taylorformule met restterm van Lagrange). *Is f van de klasse C^n ($n \geq 1$) over het open interval $U \ni x_0$, dan bestaat er voor elke $x \in U$ in het compact interval met uiteinden x_0 en x een ξ_x waarvoor*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2!} + \cdots + (x-x_0)^{n-1} \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} \\ &\quad + (x-x_0)^n \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!}. \end{aligned}$$

Bewijs. De formule is triviaal voor $x = x_0$. Daarom bekijken we een $x > x_0$; het geval $x < x_0$ verloopt analoog. We vertrekken van de gedaante (10.6), en zullen aantonen dat

$$\int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt = (x-x_0)^n \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!} \quad (10.10)$$

voor een of andere $\xi_x \in [x_0, x]$. Wegens $f \in C^n(U)$ is $f^{(n)}$ continu over het compact interval $[x_0, x]$, en bereikt daarin dus een grootste waarde M en een kleinste waarde m . Vandaar

$$\underbrace{\int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} m dt}_{=m(x-x_0)^n/n!} \leq \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \leq \underbrace{\int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} M dt}_{=M(x-x_0)^n/n!}.$$

We hebben dus

$$m \leq \frac{n!}{(x-x_0)^n} \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \leq M.$$

Door de tussenwaardstelling is de ingesloten term gelijk aan $f^{(n)}(\xi)$ voor een $\xi_x \in [x_0, x]$. Hieruit volgt (10.10). $\square$

10.3.4 Definitie. De veelterm

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

noemen we **Taylorbenadering van orde $n-1$ met centraal punt x_0** voor f .

10.3.5 Opmerkingen.

1. De *graad* van de Taylorbenadering van orde $n-1$ kan lager dan $n-1$ zijn.
2. Is f een veelterm van graad $n-1$, dan is $R_n = 0$, en de Taylorbenadering van orde $n-1$ valt met f zelf samen.

M.b.v. de Taylorformule kunnen we gemakkelijk voldoende voorwaarden vinden voor de Taylorontwikkeling van gegeven functies.

10.3.6 Stelling (Voldoende voorwaarden voor Taylorontwikkeling). Zij $a > 0$. Als f onbepaald afleidbaar is over $]-a, a[$, en als er een constante C bestaat met

$$|f^{(n)}(x)| \leq C \quad (-a < x < a, \quad n = 0, 1, \dots), \quad (10.11)$$

dan is

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (-a < x < a). \quad (10.12)$$

Bewijs. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $-a < x < a$ hebben we

$$f(x) = \left(f(0) + x f'(0) + x^2 \frac{f''(0)}{2} + \dots + x^{n-1} \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \right) + x^n \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \quad (10.13)$$

met ξ in het compact interval met uiteinden 0 en x . De restterm nadert naar nul als $n \rightarrow +\infty$ want

$$\left| \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \right| \leq C \frac{a^n}{n!}$$

met $\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$ omdat de reeks $\sum \frac{a^n}{n!}$ convergeert (regel van d'Alembert). Zo volgt na $n \rightarrow +\infty$ uit (10.13) dat

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} \right),$$

m.a.w. (10.12). □

10.3.7 Opmerking. De voorwaarde (10.11) kan op tal van manieren verzwakt worden. Ons bewijs zou nauwelijks veranderen als men enkel zou eisen dat

$$|f^{(n)}(x)| \leq AB^n \quad (-a < x < a, \quad n = 0, 1, \dots)$$

met A en B constant.

10.3.8 Toepassing. *Er geldt dat*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (10.14)$$

Bewijs. Neem willekeurig $x \in \mathbb{R}$. Kies dan $a > 0$ zo dat $-a < x < a$. Uit

$$\sin' = \cos, \quad \sin'' = -\sin, \quad \sin''' = -\cos, \quad \sin^{(iv)} = \sin \quad \text{enzovoort}$$

volgt

$$|\sin^{(n)} x| \leq 1 \quad (-a < x < a, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Bijgevolg voldoet $\sin$ over $] -a, a[$ aan de voldoende voorwaarden uit 10.3.6. Wegens

$$\sin 0 = 0, \quad \sin'(0) = 1, \quad \sin''(0) = 0, \quad \sin'''(0) = -1, \quad \sin^{(iv)}(0) = 0, \quad \text{enzovoort}$$

volgt (10.14). Omdat x willekeurig was, is die ontwikkeling geldig over heel $\mathbb{R}$. □

10.3.9 Gevolg. *Er geldt*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (10.15)$$

Bewijs. Termsgewijze afleiding van (10.14). □

10.3.10 Toepassing. *Er geldt dat*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (10.16)$$

Bewijs. Neem willekeurig $x \in \mathbb{R}$. Kies dan $a > 0$ zo dat $-a < x < a$. Wegens $|(e^x)^{(n)}| = e^x \leq e^a$ voldoet e^x over $] -a, a[$ aan de voldoende voorwaarden uit 10.3.6. Wegens $\exp^{(n)}(0) = \exp 0 = 1$ volgt dan (10.16). Omdat x willekeurig was, is die ontwikkeling geldig over heel $\mathbb{R}$. □

10.3.11 Gevolg. *Er geldt dat*

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$$

en

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$$

Bewijs. Combinatie van

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \text{ en } e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

□

10.3.2 Taylorontwikkelingen afgeleid uit de binomiaalreeks

Het z.g. **binomium van Newton** levert een natuurlijke macht van de tweeterm $1 + x$ op, nl.

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + x^m,$$

en is geldig voor alle $x \in \mathbb{R}$. Als de exponent niet een natuurlijk getal is, dan wordt het binomium vervangen door een zeer machtige reeksontwikkeling, genoemd de **binomiaalreeks**, die we nu bekijken.⁴

10.3.12 Stelling. *Voor $\alpha \in \mathbb{R}$ geldt:*

1. de n -de coëfficiënt van de Taylorontwikkeling van $(1 + x)^\alpha$ is $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$.
2. De machtreeks

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (10.17)$$

heeft convergentiestraal 1 als $\alpha \notin \mathbb{N}$.

Bewijs. 1. Stellen we $f(x) := (1 + x)^\alpha$, dan is $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, zodat $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$.

2. Als $\alpha \in \mathbb{N}$, dan is $a_n := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = 0$ vanaf een zeker rangnummer. De reeks herleidt zich dan tot een veelterm, nl. het gewone binomium van Newton, en de gelijkheid is geldig voor alle $x \in \mathbb{R}$. Veronderstellen we $\alpha \notin \mathbb{N}$, dan kunnen we a_n in noemers gebruiken. In het rechterlid van (10.17) staat dan geen veelterm, maar een reeks met oneindig veel termen.

De convergentiestraal berekenen we m.b.v. 10.1.6. We hebben

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n+1}{n-\alpha} \right| = 1,$$

zodat $R = 1$. □

⁴De reeks werd in 1666 ontdekt door Newton, maar een bewijs van de convergentie naar $(1+x)^\alpha$ werd pas door Euler geleverd in 1774, meer dan een eeuw later!

In de cursus *Complex Analysis* zullen we aantonen dat de Taylorontwikkeling van $(1+x)^\alpha$ voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ en $-1 < x < 1$ wel degelijk convergeert naar $(1+x)^\alpha$, m.a.w. dat

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (-1 < x < 1).$$

10.3.13 Notatie. Omwille van zijn formele analogie met een combinatie noteert men ook voor $\alpha \notin \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!},$$

met de afspraak $\binom{\alpha}{0} = 1$.

Zo kan men de binomiaalreeks kort herschrijven als

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (-1 < x < 1).$$

10.3.14 Voorbeeld. Voor $\alpha = -1/2$ vinden we

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1), \quad (10.18)$$

in het bijzonder

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots \quad (-1 < x < 1). \quad (10.19)$$

10.3.15 Gevolg. Door termsgewijze integratie van (10.19) volgt

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

Op analoge wijze verkrijgt men door termsgewijze integratie de Taylorontwikkeling

$$\operatorname{argsinh} x = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

10.3.16 Opmerking. Vermits $\operatorname{argcosh}$ enkel voor $x \geq 1$ gedefinieerd is, kan er geen Taylorreeks van de hier beschouwde vorm voor gegeven worden.

10.4 De limietstelling van Abel

Een machtreeks is doorgaans niet gelijkmatig convergent in heel haar convergentieschijf $B(0, R)$. Hiervan een

10.4.1 Voorbeeld. De reële machtreeks $1 + x + x^2 + \dots$ is niet gelijkmatig convergent in haar convergentie-interval $] -1, 1[$, zelfs niet in $] 0, 1[$.

Bewijs. In $] -1, 1[$ is de reekssom $\frac{1}{1-x}$. Gelijkmatige convergentie in $]0, 1[$ zou betekenen dat we bij $\varepsilon = 1 > 0$ een $N > 0$ kunnen vinden met de eigenschap dat

$$(\forall x \in]0, 1[)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n \geq N \implies \left| \frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2 + \dots + x^n) \right| < 1 \right)$$

m.a.w.

$$(\forall x \in]0, 1[)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n \geq N \implies \frac{x^{n+1}}{1-x} < 1 \right).$$

In het bijzonder zou

$$\frac{x^{N+1}}{1-x} < 1 \quad (0 < x < 1)$$

en dus

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^{N+1}}{1-x} = +\infty \leq 1,$$

een strijdigheid. □

10.4.2 Opmerking. Als de convergentiestraal $+\infty$ is, dan is de machtreeks over elke schijf van het complexe vlak gelijkmatig convergent. (Doorgaans niet over geheel het complexe vlak!)

We hebben er al op gewezen dat men niets algemeen kan beweren over de eventuele convergentie van een machtreeks in punten op de cirkel $|z| = R$. In het bijzonder kan een reële machtreeks $\sum a_n x^n$ al dan niet convergeren voor $x = R$ of $x = -R$. Als er inderdaad convergentie optreedt in R of $-R$, dan kan men over de gelijkmatige convergentie meer zeggen dan wat stelling 10.2.1 levert. Gemakshalve geven we het bewijs voor $R = 1$, en voor het rechte eindpunt $x = 1$.

10.4.3 Stelling (Convergentiestelling van Abel, 1826). *Zij $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ een reële machtreeks met convergentiestraal $R = 1$. Als de machtreeks ook in het punt $x = 1$ convergeert, dan convergeert ze over heel het lijnstuk $[0, 1]$ gelijkmatig⁵.*

Bewijs. Mochten we weten dat $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ absoluut convergeert, dan zou de gelijkmatige convergentie onmiddellijk via de M-test volgen (omdat $|a_n x^n| \leq |a_n|$ voor alle $x \in [0, 1]$).

Vermits we enkel weten dat $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ convergeert, weten we enkel dat bij een willekeurige $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat (door het kenmerk van Cauchy) voor elke $n \geq N$

$$\underbrace{|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}|}_{=: A_p} \leq \varepsilon, \quad \forall p \geq 1.$$

We schrijven daarom $a_{n+p} := A_p - A_{p-1}$ (voor $p > 1$), zodat⁶

$$\begin{aligned} \sum_{m=n+1}^{n+p} a_m x^m &= A_1 x^{n+1} + (A_2 - A_1) x^{n+2} + \dots + (A_p - A_{p-1}) x^{n+p} \\ &= A_1 (x^{n+1} - x^{n+2}) + A_2 (x^{n+2} - x^{n+3}) + \dots + A_{p-1} (x^{n+p-1} - x^{n+p}) + A_p x^{n+p}, \end{aligned}$$

⁵en niet enkel over $[0, R']$ met $0 < R' < 1$ zoals 10.2.1 voorspelt.

⁶De hiernavolgende volgende formule (ook toegepast voor willekeurige $b_n \in \mathbb{C}$ i.p.v. x^n) wordt soms *partiële sommatie* genoemd, naar analogie met partiële integratie. Men vervangt hierbij de integraal door haar discrete tegenhanger, de som, en de afleiding door haar discrete tegenhanger, het verschil van twee opeenvolgende termen.

zodat, wegens $x^m \geq x^{m+1}$ (voor $m \in \mathbb{N}$),

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=n+1}^{n+p} a_m x^m \right| &\leq |A_1| |x^{n+1} - x^{n+2}| + \dots + |A_{p-1}| |x^{n+p-1} - x^{n+p}| + |A_p| |x^{n+p}| \\ &\leq \varepsilon(x^{n+1} - x^{n+2}) + \dots + \varepsilon(x^{n+p-1} - x^{n+p}) + \varepsilon x^{n+p} = \varepsilon x^{n+1} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Door limietovergang $p \rightarrow +\infty$ volgt dat

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq \varepsilon$$

zodra $n \geq N$. Omdat N onafhankelijk is van $x \in [0, 1]$, is de convergentie dus gelijkmatig op $[0, 1]$. $\square$

10.4.4 Stelling (Limietstelling van Abel). Zij $\sum a_n x^n$ een reële machtreeks, met convergentiestraal $R = 1$, en stel $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ voor $0 \leq x < 1$. Als de machtreeks ook in het punt $x = 1$ convergeert, dan is haar reekssom in dat punt gelijk aan $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$, m.a.w.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Bewijs. Elke term $a_n x^n$ is continu in het punt $x = 1$. Door overdracht van continuïteit (de convergentie is gelijkmatig over $[0, 1]$, convergentiestelling van Abel) is ook f op $[0, 1]$ continu in het punt $x = 1$. Dit betekent dat $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$, waarbij $f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. $\square$

Een analoge limietstelling bestaat voor het linkse eindpunt van het convergentie-interval.

10.5 Oefeningen

1. Bepaal de convergentiestraal van de volgende machtreeksen, en onderzoek de convergentie in de eindpunten van het convergentie-interval:

$$(1) \sum \frac{(n+1)x^n}{2^n 3^{n+1}} \quad (2) \sum \frac{x^n}{2^n \sqrt{n+1}} \quad (3) \sum n! x^n.$$

2. Geef de Taylorontwikkeling van de volgende functies, en ga na waar ze geldig is:

$$\begin{aligned} (1) \frac{1}{x^2+3} \quad (2) \frac{a+x}{b+x} \quad (a \text{ en } b > 0 \text{ constant}) \quad (3) \frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4} \quad (4) \frac{1}{(1+x)^2} \quad (5) \sin^3 x \\ (6) \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} \quad (7) \int_0^x \sin(t^2) dt. \end{aligned}$$

3. Ontwikkel de ‘complete elliptische integraal van de eerste soort’

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} \quad (-1 < k < 1)$$

in een machtreeks naar k .

4. Geef de Taylorbenadering van

$$(a) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad (\text{tot en met } x^2)$$

- (b) $\cosh x \sin x$ (tot en met x^3)
 (c) $\tan x$ (tot en met x^5)
 (d) $\frac{e^x + \sin x - 1}{\ln(1+x)}$ (tot en met x^3)
 (e) $\ln(\cos x)$ met $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ (tot en met x^4)
 (f) $\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\varepsilon}{a-b+\sqrt{b^2-\varepsilon^2}})^2}} - 1$ met a, b, ε positieve constanten en ε 'klein' (tot en met ε^4)
 (g) $\frac{-2x}{f(x)}(a + c(f(x) - b))$ met a, b, c positieve constanten en $f(x) = \sqrt{b^2 + x^2}$ (tot en met $(\frac{x}{b})^3$)
 (h) $\sqrt{1 + \sin x}$ (tot en met x^4).
 (i) $\frac{1}{\sqrt{\cos x}}$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) (tot en met x^4).

5. Bekijk de rij van Fibonacci: $a_0 = 1, a_1 = 1$ en verder elke a_n ($n \geq 2$) de som van de twee voorafgaande termen. Toon aan dat $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2}$ en bepaal de convergentiestraal.
 6. (Euler, 1755) Gebruik de binomiaalreeksontwikkeling van $(1+x)^{-1/2}$ om aan te tonen dat

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5} \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{3}{2} \frac{1}{100^2} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 3} \frac{1}{100^3} + \dots \right).$$

Bereken d.m.v. de eerste 4 termen van deze reeks een benadering van $\sqrt{2}$ (correct tot 7 decimalen na de komma).

Hoofdstuk 11

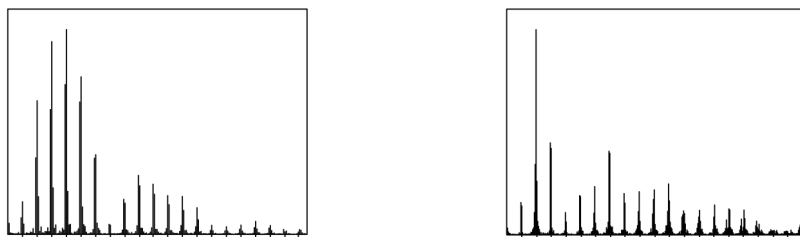
Fourierreeksen

Een groot wiskundig gedicht.

(LORD KELVIN over het werk van Fourier, 1864)

De beschrijving van de beweging van een trillende snaar werd door d'Alembert en Euler gegeven m.b.v. twee arbitraire functies, en door Daniel Bernoulli m.b.v. een reeks van sinussen en cosinussen. Zo groeide het idee dat het misschien mogelijk was een ‘willekeurige’ functie te ontwikkelen in sinussen en cosinussen. Na een flinke controverse toonde Fourier in 1822 dat dit inderdaad zo was: zulke ontwikkeling wordt naar hem *Fourierontwikkeling* genoemd. Een echt overtuigend bewijs werd pas door Dirichlet geleverd in 1829.

Fourierontwikkelingen vinden toepassingen in de signaalanalyse. Zo worden bv. luchttrillingen door het menselijk gehoor waargenomen als een geluidssignaal. Als de trilling periodiek is, dan bezit het signaal een toonhoogte. De relatieve sterkte van de coëfficiënten in de Fourierontwikkeling van het periodieke signaal bepaalt de klankkleur. Het analyseren (en aanpassen) van de Fouriercoëfficiënten wordt daarom ook *harmonische analyse* genoemd en wordt op grote schaal toegepast in de muziekindustrie (akoestische filters, MP3-compressie, ...). De toepassingen blijven zeker niet beperkt tot geluidssignalen: in bijna elke tak van de wetenschap wordt harmonische analyse toegepast op periodieke signalen.



Figuur 11.1: Fouriercoëfficiënten van het geluid van een gitaar, links zonder en rechts met *distortion* (de lengte van het n -de staafje komt in onze notatie overeen met $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$).

11.1 Fourierreeksen

11.1.1 Definitie. Een **Fourierreeks** of **goniometrische reeks** is een reeks van functies van de vorm

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (11.1)$$

met a_n, b_n reële constanten. Hierin is $\cos nx$ geschreven voor de afbeelding $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \cos nx$, en analoog voor $\sin nx$.

Omdat elk van de termen van een Fourierreeks 2π -periodiek is, is haar reekssom dat ook (in de punten waar de reeks convergeert).

Wegens $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ hebben we dat $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ en $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. Berekeningen met Fourierreeksen vereenvoudigen soms door de reeks uit te drukken d.m.v. de complexe exponentiële: de n -de partiële som wordt dan

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{=:c_0} + \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{a_k - ib_k}{2}}_{=:c_k} e^{ikx} + \underbrace{\frac{a_k + ib_k}{2}}_{=:c_{-k}} e^{-ikx} = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

met $c_k \in \mathbb{C}$, en voor de reekssom schrijven we

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} := c_0 + (c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix}) + \cdots + (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) + \cdots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

We leiden nu een methode af om de coëfficiënten van een Fourierreeks met reekssom $f(x)$ uit te drukken a.d.h.v. de functie $f(x)$.

11.1.2 Hulpstelling (Orthogonaliteit¹). *Als $n \neq m$, dan is $\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-imt} dt = 0$.*

Bewijs. Als $m, n \in \mathbb{N}$ met $m \neq n$, dan is

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-imt} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)t dt + i \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)t dt = 0.$$

□

11.1.3 Stelling. *Als de Fourierreeks (11.1) gelijkmatig convergeert over $\mathbb{R}$ met reekssom f , dan is*

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n \in \mathbb{Z})$$

of nog,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

¹De term *orthogonaliteit* komt voort uit de analogie met orthogonale vectoren e_j ($j = 1, \dots, n$) in $\mathbb{R}^n$, waarvoor het inproduct $e_i \cdot e_j = 0$ als $i \neq j$.

Bewijs. Door de gelijkmatige convergentie is de reekssom f continu en is het toegestaan reeks en integraal te verwisselen. De convergentie blijft bovendien gelijkmatig als we vermenigvuldigen met de begrensde functie e^{-inx} : wegens 9.1.4 is immers

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |s_n(x)e^{-inx} - f(x)e^{-inx}| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |s_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Gebruik makend van de orthogonaliteit vinden we

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx &= c_0 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx + \left(c_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix} e^{-inx} dx + c_{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix} e^{-inx} dx \right) + \dots \\ &= c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-inx} dx = c_n \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi c_n, \end{aligned}$$

zodat ook

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(e^{-inx} + e^{inx}) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)i(e^{-inx} - e^{inx}) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

□

11.1.4 Opmerking. Als de Fourierreeks gelijkmatig convergeert, dan is de reekssom continu (overdracht van continuïteit). Er zal echter blijken dat we ook functies met sprongpunten kunnen schrijven als een Fourierreeks: in dat geval kan de convergentie nooit gelijkmatig zijn.

11.2 Fourierontwikkeling

We bekijken nu de omgekeerde vraag: kunnen we een gegeven functie f ontbinden in een Fourierreeks?

11.2.1 Definitie. Als f een afbeelding $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ is, dan noemen we de coëfficiënten a_n en b_n uit stelling 11.1.3 de **Fouriercoëfficiënten** van f . De Fourierreeks met die coëfficiënten noemt men de **Fourierontwikkeling**² van f .

11.2.2 Opmerking. Als f even is, zijn de Fouriercoëfficiënten

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad \text{en} \quad b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

terwijl voor een oneven f

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{en} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Het is niet zeker dat de Fourierontwikkeling van f convergeert en, als ze convergeert, dat haar reekssom f is. We zullen bewijzen dat dit wel zo is als f (ook na periodieke uitbreiding) van klasse C^1 is.

²J.B. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*, 1822

11.2.3 Hulpstelling. De n -de partieelsom van de Fourierontwikkeling van een 2π -periodieke afbeelding $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gelijk aan

$$s_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t) dt, \quad \text{waarbij } D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikt}.$$

Bewijs. We kiezen $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ en berekenen

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{ikx} e^{-iku} du = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{ik(x-u)} du \\ &\stackrel{(u-x=t)}{=} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} dt = \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) D_n(t) dt. \end{aligned}$$

Doordat f en D_n beide 2π -periodiek zijn, is ook het hele integrandum 2π -periodiek. In plaats van over $]-\pi-x, +\pi-x[$ kunnen we dus integreren over gelijk welk interval met lengte 2π , b.v. over $]-\pi, \pi[$. $\square$

11.2.4 Gevolg. De Fourierontwikkeling van een 2π -periodieke afbeelding $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convergeert in het punt $x \in \mathbb{R}$ naar $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t) dt$ (als deze limiet bestaat).

11.2.5 Definitie. De functie D_n noemen we de n -de **kernfunctie van Dirichlet**.

Uit haar definitie volgt dat D_n continu is op heel $\mathbb{R}$ en 2π -periodiek met

$$\boxed{\int_0^{\pi} D_n = \int_{-\pi}^0 D_n = \frac{1}{2} \quad \text{en} \quad \int_{-\pi}^{\pi} D_n = 1}$$

11.2.6 Hulpstelling. Voor alle natuurlijke n en $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ is

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}. \quad (11.2)$$

Bewijs. Omdat $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$ als $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, is

$$\begin{aligned} 2\pi D_n(x) &= \frac{1 + e^{ix} + \dots + e^{i2nx}}{e^{inx}} = \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{(e^{ix} - 1)e^{inx}} \\ &= \frac{(e^{i(2n+1)x} - 1)e^{-i(n+1/2)x}}{(e^{ix} - 1)e^{-ix/2}} = \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-i(n+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

$\square$

11.2.7 Hulpstelling (Hulpstelling van Riemann). Is f integreerbaar over $]a, b[$, dan geldt dat

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0.$$

Bewijs. Zij willekeurig $\varepsilon > 0$, en onderstel dat $|f| \leq M$ in $]a, b[$. Omdat f integreerbaar is, bestaat er een partitie $\pi := (x_0, x_1, \dots, x_n)$ van $[a, b]$ waarvoor

$$S_\pi - s_\pi = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \ell_k < \varepsilon/2.$$

In elk interval $]x_{k-1}, x_k[$ definiëren we ω_k d.m.v.

$$\omega_k(x) := f(x) - m_k \quad (x_{k-1} < x < x_k),$$

zodat voor $k = 1, 2, \dots, n$ geldt dat

$$0 \leq \omega_k(x) \leq M_k - m_k \quad (x_{k-1} < x < x_k).$$

Dan hebben we

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \sin \lambda x \, dx \\ &= \sum_{k=1}^n m_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sin \lambda x \, dx + \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_k(x) \sin \lambda x \, dx. \end{aligned}$$

Voor $\lambda > 0$ leiden we hieruit af dat

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx \right| &\leq \sum_{k=1}^n |m_k| \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sin \lambda x \, dx \right| + \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |\omega_k(x) \sin \lambda x| \, dx \\ &\leq \sum_{k=1}^n |m_k| \left| \frac{\cos \lambda x_{k-1} - \cos \lambda x_k}{\lambda} \right| + \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (M_k - m_k) \underbrace{|\sin \lambda x|}_{\leq 1} \, dx \\ &\leq \sum_{k=1}^n M \frac{1+1}{\lambda} + \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= n \frac{2M}{\lambda} + S_\pi - s_\pi \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

als λ voldoende groot is. □

Voor de volgende stellingen uit dit hoofdstuk zijn gewone continuïteit of integreerbaarheid niet voldoende, en hebben we een aangepast begrip nodig.

11.2.8 Definitie. Een functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ noemen we over $[a, b]$ **stuksgewijs C^1 met verdeelpunten $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$** als $f|_{]x_{j-1}, x_j[}$ voor elke $j = 1, 2, \dots, k$ de restrictie is van een functie in $C^1([x_{j-1}, x_j])$.

11.2.9 Opmerking. Om aan de definitie te voldoen hoeft f niet gedefinieerd te zijn in de verdeelpunten, en zij is niet noodzakelijk continu over $[a, b]$. Zij is integreerbaar over $]a, b[$. Bovendien heeft f in a een rechterlimiet, in b een linkerlimiet en in elk punt van $]a, b[$ een rechter- en een linkerlimiet.

11.2.10 Stelling (Singuliere Integraal van Dirichlet). *Is f stuksgewijs C^1 over $[-\pi, \pi]$, dan is*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f D_n = \frac{f(0+) + f(0-)}{2} \quad (11.3)$$

Bewijs. De formule (11.3) is de som van de twee formules

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} f D_n = \frac{f(0+)}{2} \quad (11.4)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^0 f D_n = \frac{f(0-)}{2}. \quad (11.5)$$

We tonen expliciet (11.4) aan; (11.5) krijgt men op analoge wijze. M.b.v. $\int_0^{\pi} D_n = \frac{1}{2}$ zien we dat (11.4) neerkomt op

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} f D_n = f(0+) \int_0^{\pi} D_n, \quad \text{d.i.} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} (f - f(0+)) D_n = 0.$$

Omdat

$$\int_0^{\pi} (f - f(0+)) D_n = \int_0^{\pi} \underbrace{\frac{f(x) - f(0+)}{2\pi \sin \frac{x}{2}}}_{=: g(x)} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x dx$$

zal dit volgen uit de hulpstelling van Riemann op voorwaarde dat $g(x)$ integreerbaar is op $[0, \pi]$. We bewijzen dus dat g integreerbaar is over $]0, \pi[$. Bij onderstelde is f stuksgewijs C^1 in $[-\pi, \pi]$, stel met verdeelpunten

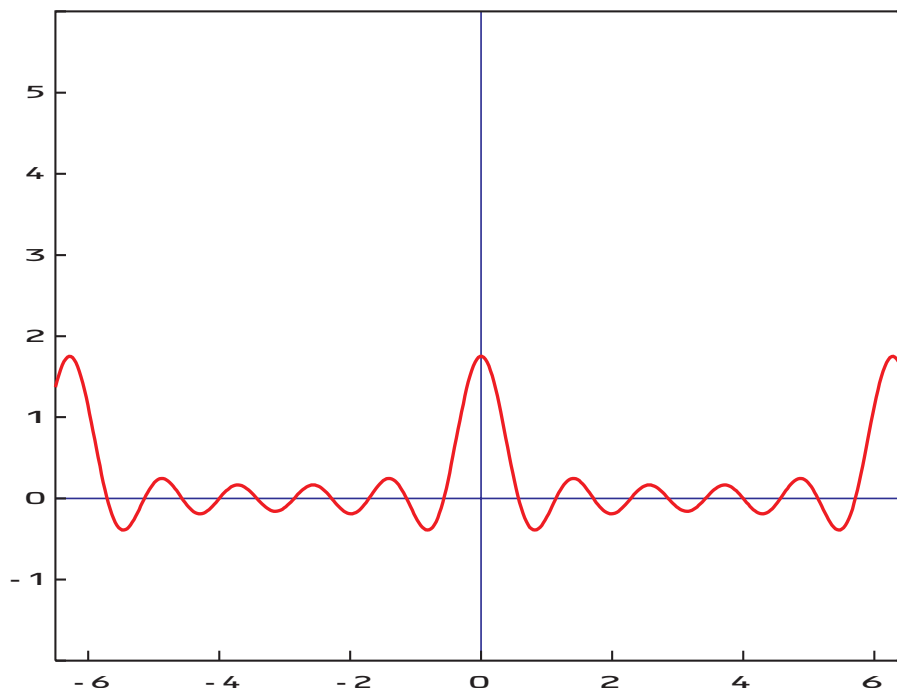
$$\underbrace{-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_j}_{\leq 0} < \underbrace{x_j < \dots < x_k = \pi}_{> 0}.$$

Op elk interval $]x_j, x_{j+1}[$, $\dots$, $]x_k, \pi[$ is g de restrictie van een continue afbeelding. Wegens stelling 6.2.6 (additiviteit van de integraal) is g integreerbaar over $]x_j, \pi[$. We moeten nog aantonen dat g integreerbaar is over het interval $]0, x_j[$. Wegens de l'Hospital is nu

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0+)}{2\pi \sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f'(x)}{\pi \cos \frac{x}{2}} = \frac{f'(0+)}{\pi},$$

zodat we $g(x)$ in $x = 0$ kunnen uitbreiden tot een continue functie. Omdat g ook in $x = x_j$ kan worden uitgebreid tot een continue functie, besluiten we dat g integreerbaar is over $]0, x_j[$ en bijgevolg over $]0, \pi[$. $\square$

11.2.11 Opmerking. De formule (11.3) noemt men de *zeefeigenschap* omdat één waarde (nl. $f(0)$) door de combinatie limiet+integraal uit het integrandum gezeefd wordt. Integralen die een zeefeigenschap vertonen heten *singulier*. De zeefeigenschap is het gevolg van het feit dat D_n voor groter wordende waarden van n een steeds hogere piek krijgt in de oorsprong. (Vergelijk, in de figuren 11.2 en 11.3, de beeldlijnen van D_5 en D_{15} .)



Figuur 11.2: Kernfunctie van Dirichlet D_5 .

11.2.12 Stelling (Convergentie van de Fourierontwikkeling). *Als f 2π -periodiek is en stuksgewijs C^1 over $[-\pi, \pi]$, dan convergeert de Fourierontwikkeling van f in elke $x \in \mathbb{R}$ naar $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$, m.a.w.*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

met a_n, b_n de Fouriercoëfficiënten van f .

Bewijs. We hebben in stellingen 11.2.3 en 11.3 alles voorhanden om het bewijs te voltooien:

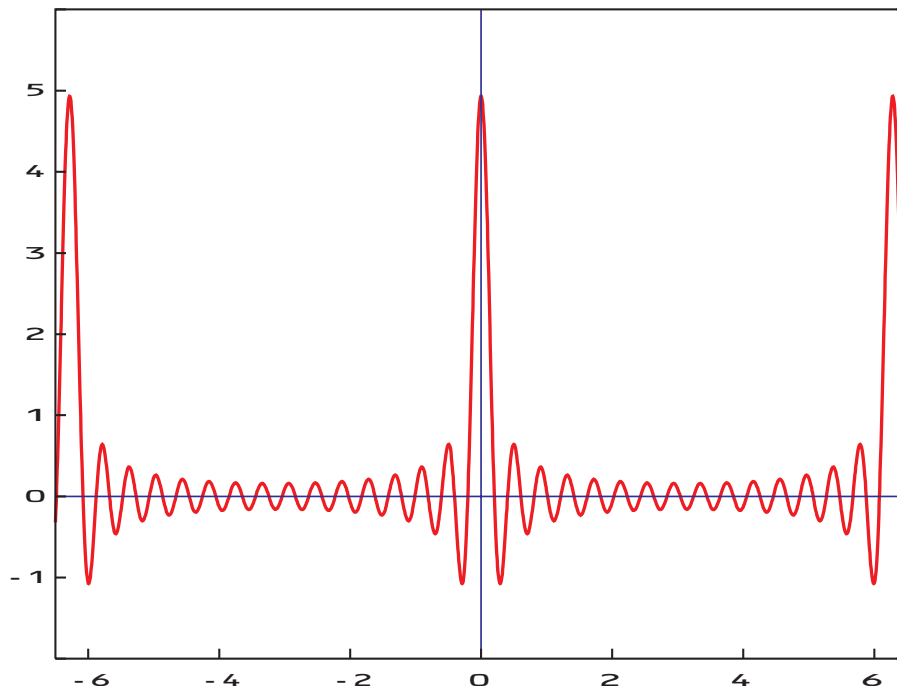
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

omdat de functie $f_x(t) := f(x+t)$ (met x vast) stuksgewijs C^1 is op heel $\mathbb{R}$ met $f_x(0) = f(x)$. $\square$

In een discontinuïteitspunt x van f convergeert de Fourierontwikkeling dus naar de gemiddelde waarde van de sprong van f in x .³ Als er geen discontinuïteitspunten zijn, krijgen we het volgende resultaat:

11.2.13 Gevolg (Convergentie van de Fourierontwikkeling, bijzonder geval). *Als f 2π -periodiek is en van klasse C^1 op heel $\mathbb{R}$, dan convergeert de Fourierontwikkeling van f op heel $\mathbb{R}$ naar f .*

³Intuïtief komt dit omdat de kernfuncties van Dirichlet even zijn (waardoor ze de waarden links en rechts van de oorsprong met hetzelfde gewicht uitgeven).



Figuur 11.3: Kernfunctie van Dirichlet D_{15} .

Om dit resultaat ook voor *niet-periodieke* functies te kunnen toepassen voeren we enkele definities in.

11.2.14 Definitie. Is f stuksgewijs C^1 over $[-\pi, \pi]$, dan definieert men de **periodieke uitbreiding**, genoteerd f^π , als de functie (niet noodzakelijk overal gedefinieerd) die ontstaat door de beperking $f/]-\pi, \pi[$ periodiek met periode 2π voort te zetten. De **genormaliseerde periodieke uitbreiding** wordt gedefinieerd door

$$f^{\pi, \nu}(x) := \frac{f^\pi(x+) + f^\pi(x-)}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Deze laatste functie is over heel $\mathbb{R}$ gedefinieerd want f^π heeft in elk punt een rechter- en een linkerlimiet.

11.2.15 Stelling. Is f stuksgewijs C^1 over $[-\pi, \pi]$, dan convergeert de Fourierontwikkeling van f in elke $x \in \mathbb{R}$ naar $f^{\pi, \nu}(x)$.

Bewijs. Pas de convergentiestelling 11.2.12 toe op de periodieke functie f^π . □

Op volkomen analoge wijze⁴ toont men de volgende veralgemening van de theorie aan, waarin niet langer het interval $[-\pi, \pi]$, maar een willekeurig interval $[-L, L]$ ($L > 0$) het uitgangspunt is, en de periode dus $2L$ is i.p.v. 2π .

11.2.16 Stelling. Als f stuksgewijs C^1 is over $[-L, L]$, en als men de Fouriercoëfficiënten

⁴of door de vorige stelling toe te passen op een herschaalde functie $g(x) := f(cx)$, voor een gepaste $c > 0$

t.o.v. $[-L, L]$ definieert d.m.v.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n = 1, 2, \dots) \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

dan convergeert

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

over $\mathbb{R}$ naar de genormaliseerde periodieke uitbreiding van f buiten $[-L, L]$.

11.3 Oefeningen

1. Geef de Fourierontwikkeling (t.o.v. $[-\pi, \pi]$) van de volgende functies, en ga na waar ze geldig is:

$$(1) x \quad (2) |x| \quad (3) f(x) = \begin{cases} -1 & \forall x \in](2k-1)\pi, 2k\pi[\\ 1 & \forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[\end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (4) x^2.$$

2. Ontwikkel de functie $f(x) = \begin{cases} x & \forall x \in [0, \pi] \\ 2\pi - x & \forall x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$ in reeks van cosinussen, en ga na waar die ontwikkeling geldig is.

3. Ontwikkel de functie $f(x) = \begin{cases} a & \forall x \in [0, \pi/2[\\ -a & \forall x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$ (met a constant) in reeks van sinussen, en ga na waar die ontwikkeling geldig is.

4. Construeer een reeks van sinussen die over $[0, 1]$ samenvalt met de functie $f(x) = \begin{cases} (1-a)x & \forall x \in [0, a] \\ a(1-x) & \forall x \in [a, 1] \end{cases}$ met $0 < a < 1$ constant.

5. (1) Bepaal de Fourierontwikkeling van $f(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \end{cases}$ t.o.v. $[-5, 5]$ (2) Bepaal de reekssom van de gevonden reeks (3) Definieer $f(-5)$, $f(0)$, $f(5)$ zo dat de gevonden reeks de Fourierontwikkeling is van de nieuwe f over $[-5, 5]$.

6. (1) Stel de Fourierontwikkeling op van $\cos \alpha x$ t.o.v. $[0, \pi]$ (α constant, $\alpha \notin \mathbb{Z}$) (2) Leid uit deze Fourierreeks een reeks af voor $1/\tan \alpha\pi$.

7. (1) Stel de Fourierontwikkeling op van de functie $f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x < 0) \\ \sin x & (0 < x < \pi) \end{cases}$ (2) Onderzoek de convergentie van die reeks (3) Bereken $\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \frac{1}{7.9} + \dots$

8. (1) Ontwikkel $x(\pi - x)$ ($0 < x < \pi$) in een reeks die enkel sinussen bevat (2) Onderzoek de convergentie van die reeks (3) Bereken de reekssom $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots$.
9. (1) Ontwikkel $f(x) := \cos x$ ($0 < x < \pi$) in een reeks van sinussen (2) Onderzoek de convergentie van de gevonden reeks (3) Definieer $f(0)$ en $f(\pi)$ zo dat de reeks naar $f(x)$ convergeert in heel $[0, \pi]$ (4) Bereken de reekssom $\frac{1}{3} - \frac{3}{35} + \frac{5}{99} - \frac{7}{195} + \frac{9}{323} - \dots$.
10. (1) Ontwikkel $f(x) := \sin x$ ($0 < x < \pi$) in een reeks van cosinussen (2) Bepaal de reekssom en verklaar (3) Definieer $f(0)$ en $f(\pi)$ zo dat de reeks naar $f(x)$ convergeert in heel $[0, \pi]$.
11. Geef voor de volgende functies de Fourierontwikkeling t.o.v. het opgegeven interval, en bepaal er de reekssom van:
- (1) $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 3 \\ 0 & -3 < x < 0 \end{cases}$ t.o.v. $[-3, 3]$ (2) $f(x) = \begin{cases} 2 + 3x & 0 \leq x < 4 \\ 0 & -4 < x < 0 \end{cases}$ t.o.v. $[-4, 4]$ (3) $f(x) = \begin{cases} \cosh x & -\frac{1}{2} < x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ \cosh x & 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$ t.o.v. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
12. (1) Ontwikkel $x(\pi - x)$ ($0 < x < \pi$) in een reeks die enkel cosinussen bevat (2) Onderzoek de convergentie van de gevonden reeks (3) Bepaal de reekssom van $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \dots$.
13. (1) Geef de Fourierontwikkeling van $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x \leq 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ (2) Onderzoek de convergentie van de gevonden reeks (3) Bepaal de reekssom $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.
14. (1) Geef de Fourierontwikkeling van $\sin \alpha x$ ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$) t.o.v. $[-\pi, \pi]$. (2) Vul in de bekomen reeks de waarde $x = \pi/2$ in en leid daaruit af dat $\frac{1}{\cos \beta} = 4\pi \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{\pi^2 (2k+1)^2 - 4\beta^2}$ voor alle $\beta \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.
15. (1) Geef een reeks van *cosinussen* die voor $0 < x < 2$ convergeert naar de functie $f(x) = x$. (2) Geef de reekssom in $x = 0$ en $x = 2$. Leg uit. (3) Geef de waarde van $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \dots$.

Hoofdstuk 12

Lineaire differentiaalvergelijkingen

12.1 Differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

Zie 7.3.10 voor de begrippen ‘differentiaalvergelijking’ en ‘oplossing van een differentiaalvergelijking’.

12.1.1 Definitie. De **orde** van een differentiaalvergelijking is de hoogst optredende orde van de afgeleide van de onbekende functie.

Een **lineaire differentiaalvergelijking** van de eerste orde heeft de gedaante

$$y' + a(x)y = R(x), \quad (12.1)$$

met $a : U \rightarrow \mathbb{R}$ en $R : U \rightarrow \mathbb{R}$ bekende continue functies over een open interval U , en y de onbekende functie. Als $R = 0$ op heel U , dan noemt men de vergelijking **homogeen**.

Als $a = 0$ op heel U , dan kunnen we de vergelijking (12.1) onmiddellijk oplossen d.m.v. een primitieve van R . We trachten nu het algemene geval te herleiden tot dit bijzonder geval door een transformatie uit te voeren, d.w.z., we leiden uit de differentiaalvergelijking voor y een nieuwe differentiaalvergelijking af voor een andere onbekende functie z die verband houdt met y . In dit geval zal een transformatie van de vorm $y = \varphi z$ het probleem oplossen.

12.1.2 Stelling. Zij U een open interval waarover de functies a en $R : U \rightarrow \mathbb{R}$ continu zijn. Dan worden de oplossingen over U van (12.1) juist gegeven door

$$\boxed{e^{-\int a} \left(c + \int R e^{\int a} \right)} \quad (12.2)$$

waarbij $c \in \mathbb{R}$ willekeurig is.

Bewijs. Stellen we $y = \varphi z$ (met φ een gegeven afleidbare functie $U \rightarrow \mathbb{R}$), dan is $y' = \varphi z' + \varphi' z$. Bijgevolg voldoet y aan (12.1) juist als z voldoet aan

$$\varphi(x)z' + (a(x)\varphi(x) + \varphi'(x))z = R(x).$$

We kiezen nu φ zo dat $a(x)\varphi(x) + \varphi'(x) = 0$. Door scheiding van de veranderlijken vinden we dat een oplossing van deze vergelijking in φ gegeven wordt door een oplossing van

$$\ln \varphi(x) = \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = - \int a(x) dx,$$

zodat $\varphi = e^{-\int a}$ voldoet. Met deze keuze van φ herleidt de vergelijking voor z zich dus tot

$$e^{-\int a} z' = R.$$

Vermits $e^{-\int a} \neq 0$ op heel U , is de algemene oplossing van deze vergelijking $z = c + \int R e^{\int a}$, met $c \in \mathbb{R}$. Dan is $y = e^{-\int a} z = e^{-\int a} (c + \int R e^{\int a})$, met $c \in \mathbb{R}$, de algemene oplossing van (12.1). Merk hierbij op dat de aanname dat y van de vorm φz is geen beperking oplegt aan de functie y : omdat φ geen nulpunten heeft, is steeds $y = \varphi \cdot (y/\varphi)$. $\square$

12.2 Differentiaalvergelijkingen van hogere orde

We beperken ons in deze paragraaf tot lineaire differentiaalvergelijkingen van tweede orde, omdat deze in de praktijk het meest voorkomen en omdat dit ook de notaties licht houdt. Een groot deel van de methoden in deze paragraaf zijn echter ook bruikbaar voor lineaire vergelijkingen van hogere orde.

12.2.1 Definitie. Een lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde heeft de gedaante

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = R(x) \quad (12.3)$$

waarbij de gegeven functies a , b en R continu zijn over een open interval U .

Als $R = 0$ op heel U , m.a.w. als de vergelijking de gedaante

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (12.4)$$

heeft, dan noemt men de vergelijking **homogeen**.

Om zulke vergelijking op te lossen gaan we analoog te werk als bij de lineaire vergelijking van de eerste orde: we voeren een transformatie uit van de vorm $y = \varphi z$ met de bedoeling de vergelijking te vereenvoudigen. Wegens $y' = \varphi z' + \varphi' z$ en $y'' = \varphi z'' + 2\varphi' z' + \varphi'' z$ is de gelijkwaardige getransformeerde differentiaalvergelijking voor z dan

$$\varphi(x)z'' + (2\varphi'(x) + a(x)\varphi(x))z' + (\varphi''(x) + a(x)\varphi'(x) + b(x)\varphi(x))z = R(x).$$

Als we er voor kunnen zorgen dat de coëfficiënt van z verdwijnt, dan blijft er een lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde over in de veranderlijke z' . Deze techniek wordt daarom vaak **verlaging van de orde** genoemd. Anders dan bij de vergelijking van eerste orde kunnen we de vergelijking voor φ die we dan verkrijgen niet meer oplossen door de veranderlijken te scheiden: de vergelijking voor φ is immers juist de homogene vergelijking (12.4). We kunnen hiermee de algemene oplossing van de niet-homogene vergelijking (12.3) vinden uit één oplossing van de homogene vergelijking (12.4).

We werken dit uit in de volgende stelling:

12.2.2 Stelling. *Is φ een oplossing zonder nulpunten van de homogene vergelijking (12.4) in een open interval U , dan wordt de algemene oplossing van de niet-homogene vergelijking (12.3) over U gegeven door*

$$c_1 \varphi + c_2 \varphi \int \frac{e^{-\int a}}{\varphi^2} + \psi_0 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

waarbij de functie ψ_0 gevonden wordt door verlaging van de orde.

Bewijs. We stellen $y = \varphi z$, met φ zoals in de opgave. Dan voldoet y aan (12.3) juist als z voldoet aan

$$\varphi(x)z'' + (2\varphi'(x) + a(x)\varphi(x))z' = R(x).$$

Omdat φ geen nulpunten heeft in U betekent dit dat $u = z'$ voldoet aan

$$u' + \left(2\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + a(x)\right)u = \frac{R(x)}{\varphi(x)}.$$

Wegens 12.1.2 is de algemene oplossing voor u

$$u = c_2 e^{-\int (2\frac{\varphi'}{\varphi} + a)} + F = c_2 \frac{e^{-\int a}}{\varphi^2} + F,$$

waarbij $c_2 \in \mathbb{R}$ willekeurig is, en $F = \frac{e^{-\int a}}{\varphi^2} \int R\varphi e^{\int a}$. De algemene oplossing voor z is dan

$$z = c_1 + c_2 \int \frac{e^{-\int a}}{\varphi^2} + \int F$$

waarbij $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ willekeurig zijn. Het gevraagde geldt dus met $\psi_0 = \varphi \int F$. $\square$

Laat ons de algemene oplossing eens nader bekijken: de functie ψ_0 uit de vorige stelling is een particuliere¹ oplossing van de niet-homogene vergelijking (12.3) (ze correspondeert immers met de keuze $c_1 = c_2 = 0$). Verder is $c_1\varphi + c_2\varphi \int \frac{e^{-\int a}}{\varphi^2}$ (met $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ willekeurig) de algemene oplossing van de homogene vergelijking: voor elke oplossing ψ van de niet-homogene vergelijking (12.3) is immers

$$(\psi - \psi_0)''(x) + a(x)(\psi - \psi_0)'(x) + b(x)(\psi - \psi_0)(x) = R(x) - R(x) = 0,$$

zodat $\psi - \psi_0$ een oplossing is van de homogene vergelijking. En ook omgekeerd: voor elke oplossing χ van de homogene vergelijking is analoog $\chi + \psi_0$ een oplossing van de niet-homogene vergelijking (12.3). We hebben dus het volgende op zich waardevolle principe aangetoond:

12.2.3 Stelling. *Als ψ_0 een oplossing is van de niet-homogene vergelijking (12.3) over U , dan worden al haar oplossingen gegeven door*

$$\{\psi_0 + \chi : \chi \text{ is een oplossing van de homogene vergelijking (12.4) over } U\}.$$

12.2.4 Definitie. Twee oplossingen $\varphi_1, \varphi_2: U \rightarrow \mathbb{R}$ van de homogene vergelijking (12.4) noemen we **afhankelijk** als een constante $c \in \mathbb{R}$ bestaat waarvoor $\varphi_2 = c\varphi_1$ of $\varphi_1 = c\varphi_2$. In het andere geval noemen we φ_1, φ_2 **onafhankelijk**.

12.2.5 Opmerking. De verzameling van alle afbeeldingen $U \rightarrow \mathbb{R}$ is een reële vectorruimte. Twee oplossingen van (12.4) zijn afhankelijk (resp. onafhankelijk) juist als ze lineair afhankelijk (resp. onafhankelijk) zijn in de vectorruimte van alle afbeeldingen $U \rightarrow \mathbb{R}$.

Bijzonder aan een *homogene lineaire* differentiaalvergelijking over U is dat de som van twee oplossingen zelf een oplossing is, en het product van een constante met een oplossing ook zelf een oplossing is (dit is een rechtstreeks gevolg van de lineariteit van de afleiding). De verzameling van de oplossingen van een gegeven homogene lineaire differentiaalvergelijking is dus een deelruimte van de vectorruimte van alle afbeeldingen $U \rightarrow \mathbb{R}$.

¹dit betekent dat de functie ψ_0 voldoet aan de vergelijking; de terminologie *een particuliere oplossing* staat dus in contrast met *de algemene oplossing*.

12.2.6 Stelling. Als U een open interval is, en φ een oplossing zonder nulpunten van de homogene vergelijking (12.4) in U , dan geldt:

1. φ en $\varphi \int \frac{e^{-\int a}}{\varphi^2}$ zijn onafhankelijke oplossingen.
2. De oplossingenverzameling van de vergelijking (12.4) is een twee-dimensionale vectorruimte.
3. Als φ_1, φ_2 twee onafhankelijke oplossingen zijn van de vergelijking (12.4), dan worden alle oplossingen van (12.4) juist gegeven door

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$$

waarbij $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ willekeurig zijn.

Bewijs. 1. Noem $\psi := \varphi \int \frac{e^{-\int a}}{\varphi^2}$. Veronderstel dat φ, ψ afhankelijk zijn. Dan is $\psi = c\varphi$ voor zekere $c \in \mathbb{R}$. (Als $\varphi = C\psi$, dan is $C \neq 0$, zodat ook dan $\psi = c\varphi$ met $c = 1/C$.) Er zou volgen dat $\int \frac{e^{-\int a}}{\varphi^2}$ constant is, waaruit $\frac{e^{-\int a}}{\varphi^2} = 0$, wat duidelijk niet geldt.

2. We merkten al op dat de oplossingenverzameling V van (12.4) een vectorruimte is. Omdat de twee oplossingen uit deel 1 onafhankelijk zijn en omdat ze bovendien V voortbrengen, vormen ze een basis van V en is dus $\dim V = 2$ (cursus *Lineaire Algebra en Analytische Meetkunde I*).

3. In een twee-dimensionale vectorruimte vormen elke twee lineair onafhankelijke vectoren een basis. $\square$

12.2.7 Gevolg. Is (φ_1, φ_2) een onafhankelijk stel oplossingen van de homogene vergelijking (12.4) over U , en is ψ_0 één oplossing van de niet-homogene vergelijking (12.3) over U , dan is

$$\{c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \psi_0 : (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

de hele oplossingenverzameling van de niet-homogene vergelijking over U .

12.2.8 Opmerking. Ook als geen oplossing zonder nulpunten van (12.4) bestaat, kan men aantonen dat de oplossingenverzameling van (12.4) twee-dimensionaal is. Men kan namelijk het volgende resultaat aantonen (cursus *Analyse IV*):

12.2.9 Stelling. Zij U een open interval. Voor elke $x_0 \in U$ en $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ heeft de vergelijking (12.4) een unieke oplossing als we bijkomend de beginvoorwaarden $y(x_0) = c_1$ en $y'(x_0) = c_2$ opleggen.

12.2.10 Gevolg.

1. De oplossingenverzameling V van (12.4) is twee-dimensionaal.
2. Twee oplossingen φ_1, φ_2 van de vergelijking (12.4) zijn onafhankelijk als en slechts als de (zgn. **Wronskiaanse**) determinant²

$$W(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

in een willekeurig punt $x_0 \in U$.

²naar J.M. Hoene (ook met diverse accenten op de e's geschreven), genoemd Wronski.

Bewijs. 1. Kies willekeurig $x_0 \in U$. Door de vorige stelling is de lineaire afbeelding $V \rightarrow \mathbb{R}^2$: $\varphi \mapsto (\varphi(x_0), \varphi'(x_0))$ bijectief. Dit betekent dat V en $\mathbb{R}^2$ isomorfe vectorruimten zijn, en dus dezelfde dimensie hebben (cursus *Lineaire Algebra en Analytische Meetkunde I*).

2. Wegens het isomorfisme uit deel 1 zijn φ_1 en φ_2 onafhankelijk als en slechts als de vectoren $(\varphi_1(x_0), \varphi_1'(x_0))$ en $(\varphi_2(x_0), \varphi_2'(x_0))$ lineair onafhankelijk zijn. $\square$

We zullen in de verdere theorie niet steunen op 12.2.9 en 12.2.10.

12.3 Differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten

We hebben de lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde volledig opgelost, op het vinden van één oplossing van de homogene vergelijking na.

In een bijzonder geval van (12.4), nl. de vergelijking

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (12.5)$$

met p en q gegeven reële constanten, hebben de oplossingen steeds een eenvoudige gedaante. In deze context komen exponentiële functies voor met een *complexe* constante in de exponent; die moeten we vooraf definiëren.

12.3.1 Definitie. Is $a + ib$ een complex getal ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$) dan definiëren we

$$e^{a+ib} := e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

Voor een complexe $\lambda := a + ib$ is $x \mapsto e^{\lambda x}$ dus een complexwaardige functie van een reële veranderlijke, expliciet

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Haar afgeleide is

$$(e^{(a+ib)x})' = (e^{ax} \cos bx)' + i (e^{ax} \sin bx)',$$

wat na uitwerking blijkt gelijk te zijn aan $(a + ib)(\cos bx + i \sin bx)e^{ax}$, m.a.w.

$$(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x} \quad (12.6)$$

We vinden dus dezelfde formule voor complexe λ als voor reële λ .

We keren nu terug naar de vergelijking (12.5). Geïnspireerd door³ de gelijkheid $(e^x)' = e^x$ proberen we een oplossing van de vorm $e^{\lambda x}$, met λ constant. We vinden dan

$$(e^{\lambda x})'' + p(e^{\lambda x})' + qe^{\lambda x} = (\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x}.$$

Omdat $e^{\lambda x} \neq 0$ voor elke x , is $e^{\lambda x}$ dus een oplossing van (12.5) juist als $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

12.3.2 Definitie. De **karakteristieke** of **kenmerkende veelterm** van de differentiaalvergelijking (12.5) is de veelterm $x^2 + px + q$.

³of door de expliciet gekende oplossingen van de vergelijking van de eerste orde met constante coëfficiënten

Omdat de karakteristieke veelterm altijd complexe wortels heeft, vinden we dus steeds een *complexwaardige* oplossing van (12.5).

12.3.3 Hulpstelling. Een afbeelding $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}$ is een *complexwaardige oplossing* van de homogene vergelijking (12.4) over U juist als $\operatorname{Re} \varphi$ en $\operatorname{Im} \varphi$ reëelwaardige oplossingen zijn van (12.4) over U .

Bewijs. Als $\varphi = u + iv$ met u, v reëelwaardig (m.a.w., $u(x) = \operatorname{Re} \varphi(x)$ en $v(x) = \operatorname{Im} \varphi(x)$ voor elke $x \in U$), dan is

$$\begin{aligned} \varphi''(x) + a(x)\varphi'(x) + b(x)\varphi(x) &= 0, \quad \forall x \in U \\ \iff (u''(x) + iv''(x)) + a(x)(u'(x) + iv'(x)) + b(x)(u(x) + iv(x)) &= 0, \quad \forall x \in U. \end{aligned}$$

Omdat twee complexe getallen gelijk zijn juist als hun reële delen en hun complexe delen samenvallen, betekent dit juist dat $u = \operatorname{Re} \varphi$ en $v = \operatorname{Im} \varphi$ oplossingen zijn van (12.4) (a en b zijn immers reëelwaardig). $\square$

12.3.4 Stelling. Twee onafhankelijke (reëelwaardige) oplossingen over $\mathbb{R}$ van (12.5) worden gegeven door

1. $e^{\lambda_1 x}$ en $e^{\lambda_2 x}$, als de kenmerkende veelterm twee verschillende reële wortels λ_1 en λ_2 heeft
2. $e^{\lambda_0 x}$ en $x e^{\lambda_0 x}$, als de kenmerkende veelterm een dubbelwortel λ_0 heeft
3. $e^{ax} \cos bx$ en $e^{ax} \sin bx$, als de kenmerkende veelterm twee verschillende complexe wortels $a \pm ib$ (dus met $b \neq 0$) heeft.

Bewijs. 1. We merkten al op dat $e^{\lambda_1 x}$ en $e^{\lambda_2 x}$ oplossingen zijn. Ze zijn onafhankelijk, want hun quotiënt $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$ is niet constant ($\lambda_1 \neq \lambda_2$).

2. We merkten al op dat $e^{\lambda_0 x}$ een oplossing is. We verifiëren dat ook $x e^{\lambda_0 x}$ een oplossing is.⁴ We noteren hiertoe de afgeleide als een operator D die inwerkt op een functie: $Df := f'$. Omdat $y'' + py' + qy = (D - \lambda_0)((D - \lambda_0)y)$ berekenen we

$$(D - \lambda_0)((D - \lambda_0)(x e^{\lambda_0 x})) = (D - \lambda_0)e^{\lambda_0 x} = 0.$$

Opnieuw zijn de oplossingen onafhankelijk omdat hun quotiënt (nl. x) niet constant is.

3. We merkten al op dat $e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$ een (complexwaardige) oplossing is. Het reële en imaginaire deel zijn dan reëelwaardige oplossingen. Opnieuw zijn ze onafhankelijk omdat hun quotiënt niet constant is ($b \neq 0$). $\square$

12.4 Methode van de onbepaalde coëfficiënten

De niet-homogene vergelijking

$$y'' + py' + qy = R(x) \tag{12.7}$$

kan zoals steeds opgelost worden m.b.v. *verlaging van de orde*. Vermits we de algemene oplossing van de homogene vergelijking kennen, volstaat het om één oplossing te vinden van de niet-homogene vergelijking. In sommige gevallen bestaat er echter een eenvoudigere methode omdat we de gedaante van een oplossing kunnen voorspellen.

⁴deze oplossing kan ook via de algemene theorie gevonden worden door *verlaging van de orde*

12.4.1 Voorbeeld. We proberen een oplossing te vinden van de vergelijking

$$y'' + y' + 2y = e^x(2x + 1)$$

van de vorm $y(x) = e^x(ax + b)$ (met $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$). Als zulke oplossing y bestaat, dan is

$$\begin{aligned} y'(x) &= e^x(ax + b) + e^x a = e^x(ax + a + b) \\ y''(x) &= e^x(ax + a + b) + e^x a = e^x(ax + 2a + b), \end{aligned}$$

zodat moet voldaan zijn aan

$$e^x(ax + 2a + b) + e^x(ax + a + b) + 2e^x(ax + b) = e^x(2x + 1)$$

m.a.w. aan

$$e^x(4ax + 3a + 4b) = e^x(2x + 1).$$

Hieraan is duidelijk voldaan als $4a = 2$ en $3a + 4b = 1$. Door het stelsel voor a en b op te lossen vinden we $a = 1/2$ en $b = -1/8$, zodat $y(x) = e^x(\frac{x}{2} - \frac{1}{8})$ inderdaad voldoet.

Deze werkwijze wordt **methode van de onbepaalde coëfficiënten** genoemd.

Voor welke rechterleden van (12.7) kunnen we de methode van de onbepaalde coëfficiënten toepassen? We merken op dat in het vorige voorbeeld de afgeleiden van y opnieuw van dezelfde vorm zijn (maar met andere waarden van de coëfficiënten), wat ons toeliet om de vergelijking uiteindelijk op te lossen d.m.v. een stelsel in de onbepaalde coëfficiënten a en b .

In het algemeen heeft een functie φ van de vorm

$$\varphi(x) = e^{ax} (C(x) \cos bx + S(x) \sin bx) \quad (12.8)$$

(met $a, b \in \mathbb{R}$, $C(x)$ en $S(x)$ veeltermen) een afgeleide van dezelfde vorm (maar waarbij de veeltermen andere coëfficiënten kunnen hebben), want

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= ae^{ax} (C(x) \cos bx + S(x) \sin bx) \\ &\quad + e^{ax} (C'(x) \cos bx + S'(x) \sin bx + S(x)b \cos bx - C(x)b \sin bx). \end{aligned}$$

We zullen in de praktijk de methode van de onbepaalde coëfficiënten daarom toepassen voor rechterleden van de vorm (12.8).

12.4.2 Voorbeeld.

$$y'' - 2\lambda y' + \lambda^2 y = e^{\lambda x} P(x) \quad (12.9)$$

met $\lambda \in \mathbb{R}$ en $P(x)$ een veelterm. We proberen een oplossing $y(x) = e^{\lambda x} Q(x)$ met $Q(x)$ een veelterm. Omdat λ de dubbelwortel is van de karakteristieke veelterm, berekenen we

$$\begin{aligned} (D - \lambda)y(x) &= e^{\lambda x} Q'(x) \\ (D - \lambda)((D - \lambda)y(x)) &= (D - \lambda)(e^{\lambda x} Q'(x)) = e^{\lambda x} Q''(x). \end{aligned}$$

Zulke $y(x)$ voldoet dus als $Q''(x) = P(x)$, waaruit volgt dat we $Q(x)$ vinden door $P(x)$ twee keer (onbepaald) te integreren.

Uit het vorige voorbeeld blijkt dat de graad van de veeltermen met onbepaalde coëfficiënten soms hoger moet gekozen worden dan de hoogste graad van de veeltermen in het rechterlid van de vorm (12.8). Men kan aantonen dat de methode van de onbepaalde coëfficiënten voor rechterleden van de vorm (12.8) altijd tot succes leidt, en men kan bovendien de graad van de veelterm als volgt voorspellen:

12.4.3 Stelling (Onbepaalde coëfficiënten). *We bekijken de vergelijking*

$$y'' + py' + qy = e^{ax} (C(x) \cos bx + S(x) \sin bx) \quad (12.10)$$

met $p, q, a, b \in \mathbb{R}$, $C(x)$ en $S(x)$ veeltermen met graad ten hoogste N .

1. *Is $a + ib$ geen wortel van de karakteristieke veelterm, dan heeft (12.10) een oplossing van de gedaante*

$$y(x) = e^{ax} (C_0(x) \cos bx + S_0(x) \sin bx).$$

2. *Is $a + ib$ een enkelvoudige wortel van de karakteristieke veelterm, dan heeft (12.10) een oplossing van de gedaante*

$$y(x) = x e^{ax} (C_0(x) \cos bx + S_0(x) \sin bx).$$

3. *Is $a + ib$ de dubbelwortel van de karakteristieke veelterm, dan is $a + ib = -p/2$ en vinden we een oplossing zoals in voorbeeld 12.4.2.*

Hierin zijn C_0, S_0 veeltermen met graad ten hoogste N .

Bewijs. (Schets.)

1. Het volstaat een complexwaardige oplossing $y(x)$ te vinden van de vergelijking

$$y'' + py' + qy = e^{(a+ib)x} (C(x) - iS(x)). \quad (12.11)$$

Door het nemen van de reële delen in die gelijkheid voldoet $u(x) := \operatorname{Re} y(x)$ dan immers aan

$$u'' + pu' + qu = \operatorname{Re} (e^{(a+ib)x} (C(x) - iS(x))) = e^{ax} (C(x) \cos bx + S(x) \sin bx).$$

Stellen we een oplossing $y(x) = e^{(a+ib)x} (c_0 + c_1 x + \dots + c_N x^N)$ van (12.11) voorop (voor zekere $c_0, \dots, c_N \in \mathbb{C}$), dan vindt men via de methode van de onbepaalde coëfficiënten (na een eerder bewerkelijke berekening) dat de matrix van het verkregen lineair stelsel voor de onbepaalde coëfficiënten een bovendriehoeksmatrix is waarvan de diagonaalelementen niet nul zijn, zodat het stelsel steeds een oplossing heeft. Van deze oplossing $y(x)$ heeft $u(x) = \operatorname{Re} y(x)$ de gezochte vorm.

2. Analooog. □

12.4.4 Opmerking (Superpositieprincipe). Ook van een vergelijking

$$y'' + py' + qy = e^{a_1 x} (C_1(x) \cos b_1 x + S_1(x) \sin b_1 x) + e^{a_2 x} (C_2(x) \cos b_2 x + S_2(x) \sin b_2 x) + \dots + e^{a_k x} (C_k(x) \cos b_k x + S_k(x) \sin b_k x)$$

kan men een oplossing y met een voorspelde gedaante berekenen. Men berekent dan eerst een y_1 die voldoet aan

$$y'' + py' + qy = e^{a_1 x} (C_1(x) \cos b_1 x + S_1(x) \sin b_1 x),$$

vervolgens een y_2 die voldoet aan

$$y'' + py' + qy = e^{a_2 x} (C_2(x) \cos b_2 x + S_2(x) \sin b_2 x)$$

enzovoort, waarna men $y = y_1 + y_2 + \dots + y_k$ stelt.

12.5 Operatormethode

Wanneer het rechterlid van (12.7) niet van de bijzondere vorm is waarvoor de methode van de onbepaalde coëfficiënten toepasbaar is, kunnen we nog gebruik maken van de volgende methode (doorgaans iets praktischer dan *verlaging van de orde*). We hadden eerder de afgeleide al als een operator D genoteerd. Vooral in het geval van vergelijkingen met constante coëfficiënten kunnen we hier gemakkelijk mee rekenen: definiëren we het product van twee operatoren als hun samenstelling, dan is (voor $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$)

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) = (D - \lambda_2)(D - \lambda_1),$$

want $(D - \lambda_1)((D - \lambda_2)f) = (D - \lambda_2)((D - \lambda_1)f)$ voor elke (voldoende aantal keer afleidbare) functie f . Men zegt in zulk geval dat de twee operatoren commuteren.

12.5.1 Opmerking. Noteren we de d.m.v. $D - x$ de operator die de functie f afbeeldt op de functie $f' - xf$, dan commuteren de operatoren D en $D - x$ niet, want

$$(D - x)Df = (D - x)(f') = f'' - xf', \text{ maar } D(D - x)f = D(f' - xf) = f'' - xf' - f.$$

We kunnen nu formeel(!) de volgende bewerking uitvoeren ($\lambda_1 \neq \lambda_2$):

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = R \iff y = \frac{1}{(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)}R = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{1}{D - \lambda_2} - \frac{1}{D - \lambda_1} \right) R,$$

waarbij (nog steeds zuiver formeel!)

$$\frac{1}{D - \lambda}R = z \iff R = (D - \lambda)z.$$

Dit suggereert dat we een oplossing van de vergelijking (12.7) kunnen vinden als een lineaire combinatie van oplossingen van twee lineaire vergelijkingen van eerste orde.

Een belangrijk cultuurverschil tussen wis- en natuurkundigen is dat natuurkundigen een formele afleiding aanvaarden als ze resultaten oplevert die in overeenstemming zijn met de waarnemingen, terwijl wiskundigen een formele afleiding wel als bron van inspiratie erkennen, maar pas tevreden zijn als ze haar ook kunnen bewijzen, zodat ze er o.a. zeker van zijn dat zulke afleidingen niet kunnen leiden tot foutieve resultaten of tot tegenspraken. Een probleem met de equivalenties in de vorige formele afleiding is bijv. dat ze strikt genomen impliceren dat de vergelijkingen een unieke oplossing zouden hebben. Daarom verifiëren we:

12.5.2 Stelling. Zij $R(x)$ afleidbaar op U . Als de karakteristieke veelterm van (12.7) twee verschillende wortels λ_1, λ_2 heeft, en φ_j particuliere oplossingen zijn van de vergelijking $y' - \lambda_j y = R(x)$ op U voor $j = 1, 2$, dan is

$$\psi = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

een particuliere oplossing van (12.7) op U .

Bewijs.

$$\begin{aligned} \psi'' + p\psi' + q &= (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)\psi = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} ((D - \lambda_1)(D - \lambda_2)\varphi_2 - (D - \lambda_2)(D - \lambda_1)\varphi_1) \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} ((D - \lambda_1)R - (D - \lambda_2)R) = R. \end{aligned}$$

□

12.5.3 Opmerkingen.

1. Volgens 12.1.2 vinden we de particuliere oplossingen $\varphi_j(x) = e^{\lambda_j x} \int e^{-\lambda_j t} R(t) dt$. In dat geval rekent men eenvoudig na dat

$$\psi(x) = \frac{\varphi_2(x) - \varphi_1(x)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{\lambda_2 x} \int R(t) e^{-\lambda_2 t} dt - e^{\lambda_1 x} \int R(t) e^{-\lambda_1 t} dt \right)$$

een particuliere oplossing is van (12.7), ook als R enkel continu is op U .

2. Het vorige geldt ook voor *complexe* $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dan is $\lambda_1 = a + bi$, $\lambda_2 = a - bi$ (zekere $a, b \in \mathbb{R}$), zodat

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int R(t) (e^{\lambda_2(x-t)} - e^{\lambda_1(x-t)}) dt = \int R(t) e^{a(x-t)} \frac{e^{ib(x-t)} - e^{-ib(x-t)}}{2bi} dt \\ &= \frac{1}{b} \int R(t) e^{a(x-t)} \sin b(x-t) dt. \end{aligned}$$

12.6 Oefeningen

1. Geef de oplossing (over het opgegeven interval, zoniet over $\mathbb{R}$) van

$$(1) \begin{cases} x^2 y' + 2xy - 1 = 0 \\ y(x_0) = y_0 \quad (x_0 > 0, y_0 \in \mathbb{R}) \end{cases} \quad \text{over } \mathbb{R}^+ \quad (2) \begin{cases} y' + \cos x \, y = \sin x \cos x \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

2. Bepaal $y(x)$ uit:

$$(1) y'' - 4y' + 4y = 0 \quad (2) y'' - 4y' + 13y = 0 \quad (3) \begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}.$$

3. Toon aan dat alle oplossingen van $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega \in \mathbb{R}$ constant) in de gedaante $y(x) = A \sin(\omega x + \alpha)$ geschreven kunnen worden.

4. Bepaal $y(x)$ uit [aanwijzing: onbepaalde coëfficiënten]:

$$\begin{aligned} (1) y'' + 4y' - 5y &= x^2 & (2) y'' + y &= 3 + 6e^{-2x} \\ (3) y'' + y' + y &= 2 \sin 3x & (4) y'' - 2y' + y &= (x+1)e^{2x} + e^x - 1 \\ (5) y'' - 4y' + 3y &= (x+1)(\cos x + 2 \sin x) & (6) y'' - 2y' + y &= \sin x + \sinh x \\ (7) y'' + y &= D_k(x) \quad (D_k \text{ is de } k\text{-de kernfunctie van Dirichlet}) \\ (8) \begin{cases} y'' - 2y' &= e^{2x} + x^2 - 1 \\ y(0) = \frac{1}{8}, y'(0) &= 1. \end{cases} \end{aligned}$$

5. Bepaal $y(x)$ (over het opgegeven interval, zoniet over $\mathbb{R}$) uit (hierbij zijn $a, b, c \neq 0$,

$\alpha \in \mathbb{R}$ constant en is f een continue functie):

- (1) $y'' + y = \tan x \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ (2) $y'' - y' - 2y = 2 \ln x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad (x > 0)$
 (3) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{(x-1)^2} \quad (x > 1)$ (4) $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}}$
 (5) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\cos^2 x} \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ (6) $\begin{cases} y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x} \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases} \quad (-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4})$
 (7) $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = f(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ (8) $y'' + 2ay' + (a^2 + b^2)y = f(x)$
 (9) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^5} \quad (x > 0)$ (10) $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^2} \quad (x > 0)$
 (11) $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2} + xe^{-2x}$ (12) $\begin{cases} y'' + c^2 y = f(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$
 (13) $y'' + 2y' + 2y = 2 \frac{\tan^2 x}{e^x} \quad (x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ (14) $\begin{cases} y'' - y = \tanh x \\ y(0) = \frac{\pi}{2}, y'(0) = 0 \end{cases}$
 (15) $y'' + y = \frac{1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}$ (16) $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$
 (17) $y'' + 4y = \ln(\sin x) + 2x \cos(2x)$
 (18) $y'' + y = \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{1+3 \cos^2 x + \alpha \cos x \sin x}} + x^2 \cos x$ (onderscheid gevallen naargelang α)
 (19) $y'' + y = \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}).$

6. (1) Stel $I(x) := \int \frac{e^{-3x}}{x} dx$ over $\mathbb{R}^+$ (tracht $I(x)$ niet te berekenen). Bereken hiermee $\int \frac{e^{-3x}}{x^2} dx$ en $\int \frac{e^{-3x}}{x^3} dx$. (Beide primitieven mogen $I(x)$ bevatten.)

(2) Bepaal $y(x)$ uit $y'' - 6y' + 9y = \frac{9x^2+6x+2}{x^3} \quad (x > 0)$.

7. Los $y(x)$ op uit [aanwijzing: verlaging van de orde]:

- (1) $xy'' - (1+x)y' + y = 0$ (2) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ (3) $y'' + 2 \tan x y' - y = 0$
 (4) $x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$ [beproof $\frac{x}{1-x}$] (5) $y'' + (\tan x - \frac{2}{\tan x})y' + \frac{2}{\tan^2 x}y = 0$
 voor $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (6) $y'' + \frac{y'}{2(x-1)} - \frac{y}{4x^2(x-1)} = 0$ [beproof $\sqrt{x}$]
 (7) $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ ($n \in \mathbb{N}$ constant), als men weet dat $J_n(x)$ voldoet.

8. Los $y(x)$ op uit $(x+1)y'' - (2x+3)y' + (x+2)y = (x+1)^2 e^{2x}$.

9. Gegeven het beginwaardenvraagstuk

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin \omega t \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases} \quad (*)$$

met $\omega > 0$ constant.

- (a) Los (*) op voor $\omega \neq 1$, door *onbepaalde coëfficiënten*.
 (b) Los (*) op voor $\omega \neq 1$, door *verlaging van de orde*. (Identieke gedeelten niet herhalen.)
 (c) Voorspel de *gedaante* (niets uitrekenen!) van de oplossing van (*) als $\omega = 1$.

(d) Bereken de limiet $\omega \rightarrow 1$ van de in 1. en 2. gevonden oplossing.

10. Los het volgende beginwaardenvraagstuk op:

$$\begin{cases} y'' + 25y = 4 \cos 3x \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Schrijf de oplossing zó, dat een product van twee sinussen te zien is.

11. Vraagstukken.

- (a) Een vloeistoftank, voorzien van een afvoerkraan met een debiet van 2 liter per minuut, bevat 10 liter zuiver water. Op het ogenblik waarop men deze afvoerkraan opent, begint men, eveneens tegen 2 liter per minuut, in deze tank een homogene oplossing van 0,3 kg zout per liter te pompen. Een mengmechanisme verzekert op elk ogenblik een homogene samenstelling van de vloeistof in de tank. Hoeveel kg zout bevat de tank na 5 minuten?
- (b) Twee vloeistofreservoirs zijn verbonden door twee leidingen, elk met een debiet van 5 liter per minuut. De ene leiding voert vloeistof van het eerste vat naar het tweede, en de tweede leiding omgekeerd. Men opent beide leidingen op een ogenblik waarop het ene vat 100 liter zuiver water bevat, en het tweede vat 100 liter waarin 2 kg zout per liter. Een mengmechanisme verzekert op elk ogenblik een homogene samenstelling van de 100 liter vloeistof in elk vat. Stel de differentiaalvergelijking op voor de functie $y(t)$ die het aantal kg zout na t minuten in het eerste vat geeft. Los op.
- (c) Uit de aarde, beschouwd als een homogene massieve bol met straal R , wordt een diameter uitgeboord. In deze luchtledig gemaakte buis laat men een voorwerp vallen met beginsnelheid 0. De bewegingsvergelijking luidt (met de oorsprong van de x -as in het middelpunt van de aarde):

$$x''(t) + \frac{g}{R}x(t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

met $R = 6,367 \times 10^6$ m en $g = 9,81$ m/sec². Bereken de tijd die het voorwerp nodig heeft om doorheen de hele aarde te vallen, en de grootste snelheid die het tijdens de val bereikt.

(d) Het opladen van een condensator wordt beschreven door de vergelijking

$$RQ'(t) + Q(t)/C = V_0.$$

Hierbij zijn $Q(t)$ de lading op tijdstip t en C de capaciteit van de condensator, V_0 de spanning van de batterij en R de weerstand van de draad. Bereken $Q(t)$ als de condensator ongeladen is op het tijdstip $t = 0$. Welke lading krijgt de condensator als $t \rightarrow +\infty$?

(e) Een parachutist springt uit een vliegtuig. De hoogte $x(t)$ van de parachutist op tijdstip t wordt gemodelleerd door de vergelijking

$$x''(t) = -\delta x'(t) - g$$

waarbij $\delta > 0$ door de luchtweerstand. Wat is de maximale snelheid die de parachutist kan bereiken (ongeacht de hoogte vanwaar hij/zij springt)?

- (f) Een veer (met verwaarloosbare massa) wordt verticaal opgehangen aan een balk. Onderaan de veer wordt een gewicht gehangen met massa $m = 0,25\text{kg}$. Noem $y(t)$ de verticale positie van het gewicht op tijdstip t (waarbij $y = 0$ overeenkomt met de natuurlijke uitwijking van de veer in rusttoestand zonder het gewicht). De bewegingsvergelijking wordt gegeven door

$$my''(t) = F_1(t) + F_2(t)$$

met $F_1(t) = -mg$ (zwaartekracht), $F_2(t) = -ky(t)$ (kracht uitgeoefend door de veer, $k > 0$). Nadat het gewicht voorzichtig aan de veer in rusttoestand gehangen is, blijkt het gewicht op het laagste punt tot 10 cm onder de rusttoestand te komen. Wat is dan de waarde van de veerconstante k ? Na hoeveel tijd is het gewicht terug op de oorspronkelijke positie?

- (g) In het fysisch model uit de vorige oefening blijft de veer eeuwig met dezelfde uitwijking op en neer gaan omdat de wrijvingskracht $F_3(t) = -\delta y'(t)$ ($\delta > 0$) niet in rekening gebracht werd. Bereken $y(t)$ in dit meer realistische model, als $\delta < 2\sqrt{mk}$. Wat gebeurt er als $t \rightarrow +\infty$?

Bijlage A

Het Griekse alfabet

Naast bijzondere symbolen en Latijnse letters gebruikt de wiskunde ook vrijwel het gehele Griekse alfabet. Kennis van de volgende tabel met uitspraak, kleine letters en hoofdletters is onmisbaar.

uitspraak	klein	groot
↓	↓	↓
alfa	α	A
bèta	β	B
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
e-pilon	ε	E
zèta	ζ	Z
èta	η	H
thèta	θ of ϑ	Θ
jota	ι	I
kappa	κ	K
lambda	λ	Λ
mu	μ	M
nu	ν	N
ksi	ξ	Ξ
o-mikron	o	O
pi	π	Π
ro	ρ of ϱ	P
sigma	σ	Σ
tau	τ	T
u-pilon	v	Υ
fi	ϕ of φ	Φ
chi	χ	X
psi	ψ	Ψ
o-mega	ω	Ω

Onderscheid de Griekse letter ε van het lidmaatschapsteken $\in$, en de Griekse letter δ van de ‘ronde d’ ∂ .

Inhoud

0	Inleiding	3
0.1	Notaties en definities	3
0.2	Elementen van logica	4
0.3	Nederlands	4
1	Getallen	5
1.1	Natuurlijke, gehele en rationale getallen	5
1.2	Reële getallen	8
1.2.1	Axioma's van de reële getallen	8
1.2.2	Eigenschappen van supremum en infimum	11
1.2.3	Reële intervallen	14
1.A	Appendix	17
2	Reële rijen	18
2.1	Elementaire theorie	18
2.2	Stelling van Bolzano-Weierstrass	22
2.3	Oefeningen	27
3	Limieten van functies	28
3.1	Limieten van functies	28
4	Continuïteit	34
4.1	Continuïteit in een vast punt	34
4.2	Continuïteit over een verzameling	37
4.3	Oefeningen	45
5	Afleidbaarheid	46
5.1	Afgeleiden van eerste orde	46
5.1.1	Algemene eigenschappen	46
5.1.2	Middelwaardestelling en toepassingen	50
5.1.3	Functies van klasse C^1	55
5.2	Afgeleiden van hogere orde	56
5.3	Oefeningen	57
6	Integratie	58
6.1	Onderintegraal, bovenintegraal en integraal	58
6.2	Eigenschappen van de integraal	63

6.3	Oneigenlijke integraal over een begrensde interval	68
6.4	De hoofdstellingen	70
6.5	Partiële integratie en substitutie	72
7	Elementaire functies en praktische integratie	75
7.1	De hyperbolische familie	75
7.1.1	De logaritme	75
7.1.2	De exponentiële	78
7.1.3	Machtfuncties	80
7.1.4	De hyperbolische functies	84
7.1.5	De inverse hyperbolische functies	85
7.2	De goniometrische familie	91
7.2.1	arcussinus	91
7.2.2	De goniometrische functies	93
7.2.3	Andere cyclometrische functies	99
7.3	Praktische integratietechniek	100
7.4	Oefeningen	109
8	Complexe reeksen	112
8.1	Boven- en onderlimiet van een begrensde reële rij	112
8.2	Complexe getallen	115
8.2.1	Convergentie van complexe rijen	117
8.3	Convergentie van complexe reeksen	118
8.4	Convergentie van reële reeksen zonder negatieve termen	123
8.4.1	Drie vergelijkende convergentieregels	123
8.4.2	Vier convergentieregels	124
8.5	Convergentie van reële wisselreeksen	129
8.6	Oefeningen	131
9	Gelijkmatige convergentie	132
9.1	Gelijkmatige convergentie van rijen van functies $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$	132
9.2	Gelijkmatige convergentie van reeksen van functies $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$	135
10	Machtreeksen	137
10.1	Convergentie	137
10.2	Termsgewijs integreren en afleiden van machtreeksen	139
10.3	Taylorontwikkeling	142
10.3.1	Taylorontwikkelingen afgeleid door voldoende voorwaarden	142
10.3.2	Taylorontwikkelingen afgeleid uit de binomiaalreeks	146
10.4	De limietstelling van Abel	147
10.5	Oefeningen	149
11	Fourierreeksen	151
11.1	Fourierreeksen	152
11.2	Fourierontwikkeling	153
11.3	Oefeningen	159

12 Lineaire differentiaalvergelijkingen	161
12.1 Differentiaalvergelijkingen van de eerste orde	161
12.2 Differentiaalvergelijkingen van hogere orde	162
12.3 Differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten	165
12.4 Methode van de onbepaalde coëfficiënten	166
12.5 Operatormethode	169
12.6 Oefeningen	170
A Het Griekse alfabet	174

Trefwoorden

- Abel, 148
- absolute waarde, 7
- afbeelding, 3
- afgeleide, 46
- afleidbaar, 46, 49
- aftelbaar, 11
- Archimedes, 72, 119

- beginwaardenvraagstuk, 108
- begrensd, 9
- begrensd
 - naar beneden, 9
 - naar boven, 8
 - naar onder, 9
- benedengrens, 9
- bepaalde integraal, 101
- beperking, 3
- Bernoulli
 - Daniel, 151
 - Johann, 52
- bewijs, 4
- bijjectief, 3
- binomiaalreeks, 146
- binomium, 146
- Bolzano, 24, 39, 42
- bovengrens, 8
- bovenintegraal, 60
- bovenlimiet, 113
- bovensom, 59

- Cantor, 25, 26
- Cauchy, 24, 121, 126
- C^1 , 55
- $C(J)$, 57
- C^n , 56
- $C^0(J)$, 57
- compact, 16

- complex getal, 115
- complex toegevoegd, 116
- complex vlak, 116
- C^∞ , 56
- continu, 34
- continu over een verzameling, 37
- contrapositie, 4
- convergeert, 18
- convergent
 - absoluut, 121
 - betrekkelijk, 121
 - relatief, 121
 - volstrekt, 121
- convergentie-interval, 138
- convergentiecirkel, 138
- convergentieschijf, 138
- convergentiestraal, 137
- cyclometrische functie, 99

- d'Alembert, 126, 151
- Darboux, 58, 62
- de l'Hospital, 52–54
- de Moivre, 117
- deelrij, 23
- definitieverzameling, 3
- Dirichlet, 151, 154
- discontinuïteit van de eerste soort, 34
- divergent, 19
- domein, 3
- doorprikte omgeving, 28
- driehoeksongelijkheid, 7
- driehoeksongelijkheid
 - voor integralen, 67

- Euler, 83, 146, 151
- even, 74
- exponent, 80

- extremum, 50
- Fourier, 151, 153
Fouriercoëfficiënten, 153
Fourierontwikkeling, 153
functie, 3
- gelijkmatig continu, 43
gelijkmatig convergent, 132, 135
gemajoreerd, 123
genormaliseerde periodieke uitbreiding, 158
geordend veld, 6
gescheiden veranderlijken, 108
glad, 55
God, 139
Gregory, 70, 139, 142
grondtal, 77, 80
grootste element, 9
- harmonische reeks, 124
Heine, 43
Hoene, 164
homogeen, 161
hoofdstelling
 eerste, 70
 tweede, 71
hyperharmonische reeks, 124
- imaginair deel, 115
imaginaire as, 116
imaginaire eenheid, 115, 116
implicatie, 4
index, 18
infimum, 9
injectief, 3
integraal, 61
integraalgedaante van de restterm, 142
integraaltest, 124
integrandum, 61
integratie-interval, 61
integratieveranderlijke, 61
integreerbaar, 61
inverse functie, 40
inwendig punt, 28
inwendige, 28
irrationaal, 10
- Jordan, 97
- karakteristieke veelterm, 165
kernfunctie van Dirichlet, 154
kleinste element, 9
kwadrant, 93
- Leibniz, 139
limiet, 18, 28
linkerlimiet, 31
linkscontinu, 36
logaritme, 75
lokaal, 50
- M-test, 136
machtreeks, 137
Maclaurin, 124
Madhava, 142
majorante, 123
maximum, 9, 50
meetkundige reeks, 119
middelwaardestelling, 51
minimum, 9, 50
modulus, 116
monotone functie, 39
monotone rij, 22
- natuurlijke logaritme, 75
Newton, 70, 142, 146
Nicolaus van Oresme, 119, 125
nietnegatieve functie, 3
nodig, 4
- omgeving, 28
omschikking, 122
onbepaald afleidbaar, 56
onbepaalde coëfficiënten, 168
onbepaalde integraal, 101, 102
ondergrens, 9
onderintegraal, 60
onderlimiet, 113
ondersom, 59
oneven, 74
open bal, 28
ophefbare discontinuïteit, 34
ophopingspunt, 28
oplossing van differentiaalvergelijking, 107
partieelbreuken, 104

- partieelsom, 118
- partitie, 58
- periodieke uitbreiding van f , 158
- poolcoördinaten, 98
- poolhoek, 98
- primitieve, 71
- puntsgewijs continu, 43
- puntsgewijs convergent, 132
- puntsgewijze convergent, 135

- rangnummer, 18
- rationale functie, 75
- reëel deel, 115
- reële as, 116
- rechterlimiet, 30
- rechtscontinu, 36
- reden, 119
- reeks, 118
- reeks van functies, 135
- restrictie, 3
- restterm van Lagrange, 143
- Riemann, 58, 154
- rij, 18
- Rolle, 51

- Saint Vincent, 75
- singuliere integraal, 156
- singuliere integraal van Dirichlet, 156
- sprongpunt, 34
- stamfunctie, 71
- Stevin, 39
- substitutie, 74
- supremum, 9
- surjectief, 3

- Taylor, 142
- Taylorbenadering, 144
- Taylorontwikkeling, 142
- term, 18
- termsgewijs afgeleide machtreeks, 140
- termsgewijs geïntegreerde machtreeks, 140
- transformatie, 73
- triviaal, 4
- tussenwaardestelling, 39
 - bijzonder geval, 38

- uniform continu, 43
- uniform convergent, 132, 135

- veranderlijken
 - gescheiden, 108
- verdeelpunt, 58
- vergelijking, 107
- vergelijking
 - tweede orde, 162
- Vergilius, 139
- verlaging van orde, 162
- voerstraal, 98
- voldoende, 4
- volledige inductie, 5
- volstreekte waarde, 7

- Weierstrass, 24, 42, 136
- wisselreeks, 129
- worteltest, 126
- Wronski, 164

- zeefeigenschap, 156
- zuiver imaginair, 116