UNIVERSITEIT GENT

FACULTEIT WETENSCHAPPEN

Lineaire algebra en meetkunde I

Tom De Medts

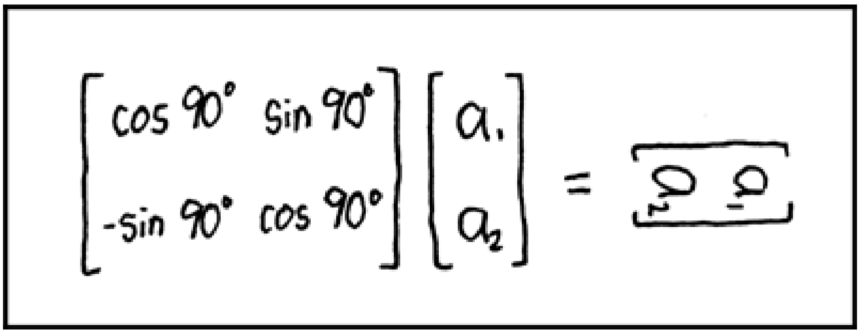
Geertrui Van de Voorde

1e bachelor wiskunde

1e bachelor fysica en sterrenkunde

academiejaar 2015–2016, 1e semester

Inhoudsopgave



http://xkcd.com/184/

Hoofdstuk 0

Inleiding: De vectorruimte $\mathbb{R}^n$

Lineaire algebra is een deelgebied van de wiskunde, dat zich bezighoudt met de studie van vectoren, vectorruimten en lineaire afbeeldingen tussen vectorruimten.

De lineaire algebra staat centraal in de moderne wiskunde en haar toepassingen (waarbij we voornamelijk denken aan natuurwetenschappen, maar ook aan bijvoorbeeld de sociale wetenschappen). Een elementaire toepassing van de lineaire algebra is het oplossen van stelsels van lineaire vergelijkingen in meerdere onbekenden, maar minstens even belangrijk is het begrijpen van lineaire operatoren (bijvoorbeeld door middel van diagonalisatie). Aangezien de lineaire algebra zo centraal staat, is het niet verwonderlijk dat heel wat andere vakgebieden van de wiskunde hierop geënt zijn, zoals bijvoorbeeld abstracte algebra of functionaalanalyse. Ook worden in concrete toepassingen niet-lineaire wiskundige modellen vaak benaderd door lineaire modellen.

Veel van de basisinstrumenten van de lineaire algebra, in het bijzonder die met betrekking tot de oplossing van stelsels lineaire vergelijkingen, werden al in de Oudheid gebruikt. Maar de abstracte studie van vectoren en vectorruimten begint pas in de jaren 1600. De oorsprong van veel van deze ideeën is afkomstig van het gebruik van determinanten voor het oplossen van stelsels van vergelijkingen. Determinanten werden voor het eerst gebruikt door Leibniz in 1693, en de algemene *regel van Cramer* werd omstreeks 1750 ingevoerd door Gabriel Cramer. De kleinste-kwadratenmethode, die voor het eerst in de jaren 1790 door Carl Friedrich Gauss werd gebruikt, is een vroege en significante toepassing van de ideeën uit de lineaire algebra.

Het onderwerp begon haar moderne vorm aan te nemen in het midden van de 19e eeuw, toen veel ideeën en methoden uit vorige eeuwen werden veralgemeend in de abstracte algebra. Het was pas rond deze tijd dat Arthur Cayley terecht opmerkte:

> *There would be many things to say about this theory of matrices which should, it seems to me, precede the theory of determinants.*

In het begin van de 20e eeuw zorgde het gebruik van deze objecten in de speciale relativiteitstheorie, statistiek en kwantummechanica er voor dat de ideeën van de lineaire algebra zich buiten de zuivere wiskunde hebben verspreid.

De belangrijkste structuren van de lineaire algebra zijn vectorruimten en de lineaire afbeeldingen tussen deze vectorruimten. Een vectorruimte is een verzameling, waarvan de elementen bij elkaar op kunnen worden geteld en met *scalairen* of getallen kunnen worden vermenigvuldigd. In veel natuurlijke toepassingen zijn deze scalairen reële getallen, i.e. elementen van $\mathbb{R}$.

Vooraleer we de theorie van de vectorruimten algemeen —en dus eerder abstract— opbouwen, kijken we eerst even naar het specifieke voorbeeld van de vectorruimte $\mathbb{R}^n$. We gaan er van uit dat de lezer reeds vertrouwd is met matrices, en geen problemen heeft om met verzamelingen te werken.

Definitie. Zij n een geheel getal met $n \geq 1$. We definiëren de *vectorruimte* $\mathbb{R}^n$ als de verzameling V die bestaat uit alle $(n \times 1)$-matrices (dit zijn dus kolommatrices bestaande uit n rijen), voorzien van twee bewerkingen, met name de *optelling* en de *scalaire vermenigvuldiging*:

Optelling. We kunnen twee elementen van $\mathbb{R}^n$ optellen door hun componenten twee aan twee op te tellen:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix},$$

voor alle $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

Scalaire vermenigvuldiging. We kunnen een element van $\mathbb{R}^n$ vermenigvuldigen met een *scalair* (dit is een reëel getal) door elke component te vermenigvuldigen met die scalair:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix},$$

voor alle $\lambda, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Deze bewerkingen zijn niet willekeurig gekozen, en voelen heel natuurlijk aan. Ze voldoen aan een heel aantal interessante eigenschappen, waarvan we er een aantal oplijsten.

(1) Voor alle $v, w, u \in V$ is $(v + w) + u = v + (w + u)$.

(2) Er bestaat een $0_V \in V$ zodat $v + 0_V = 0_V + v = v$ voor alle $v \in V$.

(3) Voor alle $v \in V$ bestaat er een element $w \in V$ zodat $v+w = w+v = 0_V$.

(4) Voor alle $v, w \in V$ geldt dat $v + w = w + v$.

(5) Voor alle $v \in V$ en alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ geldt dat $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$.

(6) Voor alle $v \in V$ is $1 \cdot v = v$.

(7) Voor alle $v, w \in V$ en alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ is $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ en $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$.

Merk op dat het element $0_V \in V$ waarvan sprake in (2) concreet kan voorgesteld worden door

$$0_V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De eigenschappen (1)–(7) zijn cruciaal om de structuur van $\mathbb{R}^n$ goed te begrijpen. We zullen dadelijk, in Hoofdstuk 2, precies deze 7 eigenschappen gebruiken om algemeen te *definiëren* wat we verstaan onder een vectorruimte. We zullen daarbij ook de structuur van de scalairen veralgemenen: waar we hier werken met de reële getallen, zullen we in onze algemene definitie werken met een willekeurig *veld*.

We kunnen vectorruimten eigenlijk pas goed begrijpen als we ook *lineaire afbeeldingen* tussen vectorruimten beschouwen.

Definitie. Beschouw vectorruimten $V = \mathbb{R}^n$ en $W = \mathbb{R}^m$. Een afbeelding $f \colon V \to W$ wordt een *lineaire afbeelding* genoemd, als ze de optelling en de scalaire vermenigvuldiging behoudt. Hiermee bedoelen we dat

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(u) + f(v) \quad \text{en} \\ f(\lambda \cdot v) &= \lambda \cdot f(v) \end{aligned}$$

voor alle $u, v \in V$ en alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Een typisch voorbeeld hiervan wordt gegeven door linkse vermenigvuldiging met een vast gekozen $m \times n$-matrix:

$$f \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

In heel wat toepassingen is het belangrijk om lineaire afbeeldingen van een vectorruimte V naar zichzelf te bestuderen, m.a.w. lineaire afbeeldingen $f : V \to V$; deze worden ook wel *lineaire operatoren* genoemd. Bijvoorbeeld, als we in de fysica bewegingen (van starre lichamen) bestuderen, dan worden deze bewegingen voorgesteld door middel van een lineaire operator op de vectorruimte $\mathbb{R}^3$ samengesteld met een translatie in $\mathbb{R}^3$. Een geavanceerder voorbeeld vinden we terug in de kwantummechanica, waar elke observabele wordt voorgesteld door middel van een zelf-toegevoegde lineaire operator op de toestandsruimte.

We zullen dan ook heel veel aandacht schenken aan de studie van lineaire afbeeldingen, en in het bijzonder van lineaire operatoren (zie Hoofdstuk 6).

Hoofdstuk

1 Inleidende begrippen

In dit eerste hoofdstuk definiëren we eerst *velden*. Deze structuren vormen een veralgemening van de rationale getallen $\mathbb{Q}$, de reële getallen $\mathbb{R}$ en de complexe getallen $\mathbb{C}$. Nadien bestuderen we veeltermen, matrices en stelsels van lineaire vergelijkingen over een willekeurig veld. We veronderstellen dat de lezer reeds kennis heeft gemaakt met veeltermen, matrices en stelsels lineaire vergelijkingen over $\mathbb{Q}$ of over $\mathbb{R}$.

We starten met een beknopte herhaling van het begrip verzameling; we veronderstellen dat de lezer hier reeds vertrouwd mee is. Onder een *verzameling* verstaan we een collectie van verschillende elementen; we gebruiken hiervoor de notatie

$$A = \{a, b, c, \dots\} .$$

Wanneer we willen benadrukken dat we een nieuwe verzameling invoeren, gebruiken we soms het symbool ":=" in plaats van "="; dit symbool kan gelezen worden als "is per definitie gelijk aan".

We zullen gebruik maken van de volgende courante begrippen: *deelverzameling*, *unie* (of vereniging), *doorsnede* (of intersectie), *verschil*.

Notatie 1.0.1. Beschouw twee verzamelingen A en B.

- Als A een *deelverzameling* van B is noteren we dit met $A \subseteq B$. We gebruiken $A \subsetneq B$ als we willen benadrukken dat $A \subseteq B$ maar $A \neq B$.
- De *unie* van A en B noteren we met $A \cup B$.
- De *doorsnede* van A en B noteren we met $A \cap B$.
- Het *verschil* van A en B noteren we met $A \setminus B := \{a \mid a \in A, a \notin B\}$.
- Het *aantal elementen* van de verzameling A (dat niet noodzakelijk eindig is) noteren we met $|A|$; het wordt ook de *kardinaliteit* van A genoemd.
- De *ledige verzameling* $\{\,\}$ noteren we als $\emptyset$.

Onder een *functie* of *afbeelding* f van een verzameling A naar een verzameling B verstaan we een relatie tussen A en B met de eigenschap dat elk element van A met juist één element van B in relatie staat[1]. We noteren een functie of afbeelding van A naar B met $f\colon A \to B$, en we noteren het unieke element van B dat we aan een gegeven element a van A koppelen, als $f(a)$. Dit geheel noteren we ook kortweg als

$$f\colon A \to B\colon a \mapsto f(a).$$

1.1 Velden

We veronderstellen dat de lezer reeds vertrouwd is met de natuurlijke getallen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, de gehele getallen $\mathbb{Z}$, de rationale getallen $\mathbb{Q}$ en de reële getallen $\mathbb{R}$. We zullen in deze cursus ook gebruik maken van de complexe getallen $\mathbb{C}$; deze voeren we hieronder beknopt in.

Definitie 1.1.1. Een *complex getal* is een uitdrukking van de vorm $a + bi$, waarin $a, b \in \mathbb{R}$ en i een nieuw 'getal' voorstelt met de eigenschap dat $i^2 = -1$.

De som en het product van twee complexe getallen $a + bi$ en $c + di$ met $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ is als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ (a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

We noteren

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

De afbeelding

$$\iota\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon a + bi \mapsto a - bi$$

is van groot belang; we noemen ι de *complexe toevoeging*, en noteren deze ook als $\iota(z) = \overline{z}$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. We definiëren de *norm* $\mathsf{N}(z)$ van een complex getal als

$$\mathsf{N}(a + bi) = (a + bi)(\overline{a + bi}) = a^2 + b^2,$$

en de *modulus* $|z|$ van een complex getal z als de vierkantswortel van de norm, i.e.

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Lemma 1.1.2. (i) *Voor alle $z \in \mathbb{C}$ is $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$ en $z\overline{z} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Bovendien is $|z| = 0$ als en slechts als $z = 0$, en is $z = \overline{z}$ als en slechts als $z \in \mathbb{R}$.*

[1] Soms wordt het onderscheid tussen functie en afbeelding gemaakt, waarbij een functie dan een relatie is zodat elk element van A met *ten hoogste* één element van B in relatie staat, maar we zullen dit onderscheid meestal niet maken.

(ii) *Elk niet-nul element* $a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *heeft een inverse voor de vermenigvuldiging, namelijk*

$$(a+bi)^{-1} = \frac{\overline{a+bi}}{\mathsf{N}(a+bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}\,.$$

Bewijs. (i) Zij $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Per definitie is $z + \overline{z} = 2a \in \mathbb{R}$, en is $|z| = \sqrt{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$. Merk op dat $a, b \in \mathbb{R}$, zodat $a^2 + b^2 \geq 0$, waarbij $a^2 + b^2 = 0$ als en slechts als $a = b = 0$.
Er geldt dat $z = a + bi = a - bi = \overline{z}$ als en slechts als $b = 0$, of dus als en slechts als $z \in \mathbb{R}$.

(ii) Merk op dat voor $a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ geldt dat $a^2 + b^2 \neq 0$, dus

$$\frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i \in \mathbb{C}.$$

Nu is

$$(a+bi)\frac{(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1.$$

□

Merk op dat we niet kunnen zeggen wanneer een element van $\mathbb{C}$ kleiner is dan een ander element van $\mathbb{C}$.

We komen nu tot de definitie van een veld; dit is een veralgemening van $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$.

Definitie 1.1.3. Een *veld*[2] is een verzameling K, voorzien van twee bewerkingen, met name een *optelling* en een *vermenigvuldiging*, die we noteren als

$$K \times K \to K : (a, b) \mapsto a + b\,,$$
$$K \times K \to K : (a, b) \mapsto ab\,,$$

met de volgende eigenschappen:

(K1) De optelling is *associatief*:
Voor alle $a, b, c \in K$ is $(a + b) + c = a + (b + c)$.

(K2) Er bestaat een *neutraal element* voor de optelling:
Er bestaat een $z \in K$ zodat voor alle $a \in K$ geldt dat $a+z = z+a = a$.
Dit element z is uniek (zie Lemma 1.1.6(i)); we noteren het als 0.

[2] In Nederland en soms ook in de buurt van Antwerpen wordt er gesproken over een *lichaam* i.p.v. een veld.

(K3) Elk element heeft een *invers element* voor de optelling:
Voor alle $a \in K$ bestaat er een element $b \in K$ zodat $a + b = b + a = 0$. Dit element b (corresponderend met a) is uniek (zie Lemma 1.1.6(iii)); we noteren het als $-a$.

(K4) De optelling is *commutatief*:
Voor alle $a, b \in K$ geldt dat $a + b = b + a$.

(K5) De vermenigvuldiging is *associatief*:
Voor alle $a, b, c \in K$ is $(ab)c = a(bc)$.

(K6) Er bestaat een *neutraal element* voor de vermenigvuldiging:
Er bestaat een $e \in K \setminus \{0\}$ zodat voor alle $a \in K$ geldt dat $ae = ea = a$. Dit element e is uniek (zie Lemma 1.1.6(ii)); we noteren het als 1.

(K7) Elk niet-nul element heeft een *invers element* voor de vermenigvuldiging:
Voor alle $a \in K \setminus \{0\}$ bestaat er een element $c \in K \setminus \{0\}$ zodat $ac = ca = 1$. Dit element c (corresponderend met a) is uniek (zie Lemma 1.1.6(iv)); we noteren het als a^{-1}.

(K8) De vermenigvuldiging is *commutatief*:
Voor alle $a, b \in K$ geldt dat $ab = ba$.

(K9) De vermenigvuldiging is *distrubitief* t.o.v. de optelling:
Voor alle $a, b, c \in K$ is $a(b+c) = ab+ac$ en dus ook $(b+c)a = ba+ca$.

De elementen van een veld noemen we vaak *scalairen*.

Opmerking 1.1.4. Om te verifiëren dat een gegeven structuur een veld is, mag je niet vergeten om de *inwendigheid* van de bewerkingen na te gaan: de optelling en vermenigvuldiging gaan van $K \times K$ naar K, dus het resultaat van de bewerkingen moet opnieuw een element van K zijn.

Ga zelf na dat voor $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ de eigenschappen (K1)–(K9) voldaan zijn; $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ zijn dus voorbeelden van velden. Bemerk dat $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ echter geen velden zijn, aangezien niet elk niet-nul element inverteerbaar is voor de vermenigvuldiging.

Veelal worden in cursussen lineaire algebra hoofdzakelijk vectorruimten over de reële getallen beschouwd. Dit is een sterke beperking; er zijn heel wat toepassingen van de vectorruimtentheorie, zowel theoretische als praktische, waarbij het essentieel is dat willekeurige velden beschouwd worden. Daarenboven is er feitelijk geen verschil in de opbouw van de theorie van vectorruimten over $\mathbb{R}$ of vectorruimten over een veld K. In deze cursus zullen we dan ook steeds over een willekeurig veld K werken.

We zullen hier niet diep ingaan op algemene theorie van velden of op eigenschappen van andere velden dan $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$; dit zou ons te ver leiden van het hoofdonderwerp van deze cursus, namelijk lineaire algebra en meetkunde.[3] We geven hieronder wel kort nog enkele voorbeelden van velden.

Voorbeelden 1.1.5. (1) Er zijn oneindig veel verschillende deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ waarop de optelling en vermenigvuldigingen van reële getallen de structuur van een veld definiëren. Zij bijvoorbeeld $p \in \mathbb{N}$ een priemgetal, en beschouw de verzameling

$$\mathbb{Q}[\sqrt{p}] := \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Ga zelf na dat $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ dan een veld is. Maak hierbij om (K7) aan te tonen gebruik van

$$(a + b\sqrt{p})(a - b\sqrt{p}) = a^2 - b^2 p \in \mathbb{Q},$$

en ook van het feit dat $a^2 - b^2 p$ enkel 0 is als $a = b = 0$, aangezien p geen kwadraat in $\mathbb{Q}$ is.
Merk op dat vermits $\sqrt{p}$ een irrationaal getal[4] is de getallen $a, b \in \mathbb{Q}$ uniek bepaald worden door $a + b\sqrt{p}$.

(2) Zij

$$\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$$

de verzameling van de veeltermen over $\mathbb{R}$ in de variabele x met de klassieke optelling en vermenigvuldiging van veeltermen (zie ook paragraaf 1.2).
We kunnen ook "breuken" $\frac{f(x)}{g(x)}$, met $g(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$ definiëren, waarbij we aannemen dat $\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ als en slechts als $f_1(x)g_2(x) = f_2(x)g_1(x)$. Zulke breuken noemt men *rationale functies over* $\mathbb{R}$ *in de variabele* x. We noteren de verzameling van rationale functies over $\mathbb{R}$ als

$$\mathbb{R}(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x], g(x) \neq 0 \right\},$$

en definiëren de bewerkingen

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \frac{g_2(x)f_1(x) + g_1(x)f_2(x)}{g_1(x)g_2(x)}$$

en

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \frac{f_1(x)f_2(x)}{g_1(x)g_2(x)}.$$

Ga na dat $\mathbb{R}(x)$ een veld is.

[3] De wiskundigen zullen veel meer leren over velden in de cursussen "Discrete Wiskunde I", "Algebra I" en "Algebra II".

[4] Een irrationaal getal is een getal in $\mathbb{R}$ dat geen element van $\mathbb{Q}$ is.

(3) Voor de geïntereseerde lezer geven we een voorbeeld van velden die slechts een eindig aantal elementen bevatten.
Zij p een priemgetal. Beschouw de verzameling van resten van gehele getallen na deling door p,

$$\mathbb{F}_p := \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{p-1}\}.$$

(We noteren $\overline{a}$ voor de rest van a na deling door p). Vermits de rest (na deling door p) van een optelling en een vermenigvuldiging van gehele getallen bekomen wordt door de resten (na deling door p) op te tellen, respectievelijk te vermenigvuldigen, en de rest van het resultaat (na deling door p) te nemen, zijn de volgende bewerkingen goed gedefinieerd:

$$\overline{n} + \overline{m} := \overline{n+m},$$
$$\overline{n}\,\overline{m} := \overline{nm}.$$

Men kan verifiëren dat het feit dat p een priemgetal is impliceert dat $\mathbb{F}_p$ met deze bewerkingen een veld is; het is een *eindig veld*. Het veld $\mathbb{F}_p$ is (in zekere zin) het enige veld met p elementen.

(4) Hoewel we hier niet ingaan op meer voorbeelden van velden is het belangrijk om in het achterhoofd te houden dat er zeer veel verschillende voorbeelden van velden bestaan! Het is zelfs onmogelijk om alle velden te classificeren.

De volgende elementaire eigenschappen van velden zullen we voortdurend gebruiken in het vervolg van de cursus. Ze tonen eigenlijk aan dat we in een willekeurig veld kunnen 'rekenen' zoals we in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ doen.

Lemma 1.1.6. *Zij K een veld. Dan gelden volgende eigenschappen:*

(i) *Het neutraal element voor de optelling is uniek, m.a.w. stel dat er twee elementen $0, 0' \in K$ bestaan zodanig dat voor alle $a \in K$ geldt dat $0 + a = a + 0 = a$ en $0' + a = a + 0' = a$, dan is $0 = 0'$.*

(ii) *Het neutraal element voor de vermenigvuldiging is uniek, m.a.w. stel dat er twee elementen $1, 1' \in K$ bestaan zodanig dat voor alle $a \in K$ geldt dat $1a = a1 = a$ en $1'a = a1' = a$, dan is $1 = 1'$.*

(iii) *Het inverse van een element in K voor de optelling is uniek, m.a.w. zij $a \in K$ en stel dat er twee elementen $b, c \in K$ bestaan zodanig dat $a + b = b + a = 0$ en dat $a + c = c + a = 0$, dan is $b = c$. Het unieke inverse element voor de optelling noteren we als $-a$, en noemen we het* tegengestelde *van a. We spreken het uit als "min a".*

(iv) *Het inverse van een element in* $K \setminus \{0\}$ *voor de vermenigvuldiging is uniek, m.a.w. zij* $a \in K \setminus \{0\}$ *en stel dat er twee elementen* $b, c \in K$ *bestaan zodanig dat* $ab = ba = 1$ *en dat* $ac = ca = 1$*, dan is* $b = c$*. Het unieke inverse element voor de vermenigvuldiging noteren we als* a^{-1} *of als* $\frac{1}{a}$*, en noemen we het* inverse *van* a*. We spreken het uit als "a invers".*

(v) *Voor alle* $a \in K$ *geldt dat* $a0 = 0$*.*

(vi) *Voor alle* $a \in K$ *geldt dat* $-(-a) = a$*.*

(vii) *Voor alle* $a \in K$ *is* $-a = (-1)a = a(-1)$*, waarbij* -1 *het tegengestelde is van* 1*. Bovendien is* $-0 = 0$*, en geldt, voor alle* $a, b \in K$*, dat*

$$(-a)b = -(ab), \; -(a+b) = (-a) + (-b), \; (-a)(-b) = ab.$$

(viii) *Zij* $a, b \in K \setminus \{0\}$*. Dan is* $ab \neq 0$*. Anders gezegd, stel dat voor* $a, b \in K$ *geldt dat* $ab = 0$*, dan is ofwel*[5] $a = 0$*, ofwel* $b = 0$*.*

(ix) *Voor alle* $a, b \in K \setminus \{0\}$ *is* $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ *en is* $(a^{-1})^{-1} = a$*.*

Bewijs. We benadrukken dat men deze eigenschappen bewijst enkel gebruik makend van de eigenschappen (K1)–(K9) en eventueel reeds bewezen eigenschappen. Als voorbeeld bewijzen we (i); de andere eigenschappen zullen uitgewerkt worden in de oefeningenlessen.

Stel dus dat er twee elementen $0, 0' \in K$ bestaan zodanig dat voor alle $a \in K$ geldt dat $0 + a = a + 0 = a$ en $0' + a = a + 0' = a$. Door $a = 0'$ te kiezen in de uitspraak $0 + a = a$, komt er $0 + 0' = 0'$; anderzijds komt er, door $a = 0$ te kiezen in de uitspraak $a + 0' = a$, dat $0 + 0' = 0$. Door deze twee gelijkheden te vergelijken besluiten we dat $0 = 0'$. □

We noteren $a - b := a + (-b)$ voor alle $a, b \in K$ en $\frac{a}{b} := ab^{-1}$ voor alle $a \in K$ en $b \in K \setminus \{0\}$.

Naast velden zullen we in deze cursus ook gebruik maken van de begrippen *groep* en *ring*.

Definitie 1.1.7. Een *groep* is een verzameling G met daarop een bewerking

$$* : G \times G \to G : (a, b) \mapsto a * b$$

met de volgende eigenschappen:

(G1) Voor alle $a, b, c \in G$ is $(a * b) * c = a * (b * c)$.

[5] Het woord "ofwel" wordt steeds in wiskundige zin gebruikt, m.a.w. het betekent dat of het ene geldt, of het andere geldt, of beide gelden.

(G2) Er bestaat een $e \in G$ zodat voor alle $a \in G$ geldt dat $a * e = e * a = a$.

(G3) Voor elke $a \in G$ bestaat er een element $b \in G$ zodat $a * b = b * a = e$.

Een groep is *abels* of *commutatief* als voor alle $a, b \in G$ geldt dat $a * b = b * a$.

Definitie 1.1.8. Een *ring* is een verzameling R met daarop een optelling en een vermenigvuldiging, die we noteren als

$$K \times K \to K : (a, b) \mapsto a + b,$$
$$K \times K \to K : (a, b) \mapsto ab,$$

met de volgende eigenschappen:

(R1) Voor alle $a, b, c \in R$ is $(a + b) + c = a + (b + c)$.

(R2) Er bestaat een $0 \in R$ zodat voor alle $a \in R$ geldt dat $a + 0 = 0 + a = a$.

(R3) Voor alle $a \in R$ bestaat er een element $b \in R$ zodat $a + b = b + a = 0$.

(R4) Voor alle $a, b \in R$ geldt dat $a + b = b + a$.

(R5) Voor alle $a, b, c \in R$ is $(ab)c = a(bc)$.

(R6) Er bestaat een $1 \in R$ zodat voor alle $a \in R$ geldt dat $a1 = 1a = a$.

(R7) Voor alle $a, b, c \in R$ is $a(b + c) = ab + ac$ en $(b + c)a = ba + ca$.

Een ring is *commutatief* als voor alle $a, b \in R$ geldt dat $ab = ba$.

We geven enkele voorbeelden van groepen en ringen. We zullen in de loop van de cursus nog meer voorbeelden ontmoeten; natuurlijk bestaan er nog veel meer voorbeelden van groepen en van ringen.

Voorbeelden 1.1.9. (1) Zij K een veld. Ga na dat K dan ook een commutatieve ring is. Dus alle voorbeelden van velden zijn ook voorbeelden van ringen.

(2) Zij K een veld. Ga na dat K met als bewerking de optelling een abelse groep is (met $e = 0$). Ga na dat $K \setminus \{0\}$ met als bewerking de vermenigvuldiging een abelse groep is (met $e = 1$). Waarom is K met als bewerking de vermenigvuldiging geen groep?

(3) Zij R een ring. Ga na dat R met als bewerking de optelling een abelse groep is (met $e = 0$). Waarom is $R \setminus \{0\}$ met als bewerking de vermenigvulding niet noodzakelijk een groep?

(4) De gehele getallen $\mathbb{Z}$, met de gekende optelling en vermenigvuldiging, vormen een commutatieve ring, die geen veld is. De natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ vormen geen ring; $\mathbb{N}$ met als bewerking de optelling vormt zelfs geen groep.

(5) De verzameling van de veeltermen $\mathbb{R}[x]$ over $\mathbb{R}$ in de variabele x met de optelling en vermenigvuldiging van veeltermen is een commutatieve ring (zie ook Lemma 1.2.2), die geen veld is.

(6) De verzameling van de $(n \times n)$-matrices over $\mathbb{R}$ met de optelling en vermenigvuldiging van matrices vormen een niet-commutatieve ring (zie ook Lemma 1.3.6).

Opmerking 1.1.10. (i) In iedere ring gelden ook de eigenschappen (i), (ii), (iii), (v), (vi) en (vii) van Lemma 1.1.6.

(ii) In een groep waar we de bewerking noteren als + gelden ook de eigenschappen (i), (iii) van Lemma 1.1.6.

1.2 Veeltermen

We veronderstellen dat de lezer vertrouwd is met veeltermen in één variabele over $\mathbb{R}$ (of over $\mathbb{Q}$). Het is echter mogelijk om veeltermen over een willekeurig veld te definiëren, zonder dat er iets essentieels verandert.

Definitie 1.2.1. Zij K een veld.

(i) Een *veelterm* (of *polynoom*) over K in één variabele x is een uitdrukking

$$a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{met } m \in \mathbb{N} \text{ en } a_0, \ldots, a_m \in K.$$

We noteren een veelterm vaak met $f(x), g(x), \varphi(x), \psi(x), \ldots$ We zullen ook vaak gebruik maken van de compactere somnotatie,

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

(ii) Definieer de verzameling van alle veeltermen over K in één variabele als

$$K[x] := \{a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \mid m \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_m \in K\}.$$

De optelling en vermenigvuldiging van twee veeltermen

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{en} \quad g(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$$

in $K[x]$ worden gegeven door[6]

$$f(x) + g(x) = (a_r + b_r)x^r + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0),$$

[6] Stel $a_i = 0$ voor alle $m < i \leq \max\{m, n\}$ en $b_j = 0$ voor alle $n < j \leq \max\{m, n\}$.

waarbij $r = \max\{m, n\}$, en

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j \Big) x^k.$$

(iii) Zij $0 \neq f(x) \in K[x]$, dan is de *graad* van $f(x)$ de exponent van de hoogste macht van x waarvan de coëfficiënt in $f(x)$ niet nul is. We noteren de graad van $f(x)$ als $\deg f(x)$. Met andere woorden, als $\deg f(x) = m$, dan is

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{met } a_0, \ldots, a_m \in K,\ a_m \neq 0.$$

Voor elke $n \in \mathbb{N}$ noteren we de verzameling van veeltermen met graad ten hoogste n als P_n, m.a.w.

$$P_n = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_0, \ldots, a_n \in K\} \subsetneq K[x].$$

(iv) Een veelterm $f(x) \in K[x]$ met $n := \deg f(x) \geq 0$ waarvan de coëfficiënt bij x^n gelijk is aan 1 noemen we een *monische veelterm*.
Een veelterm van graad nul noemen we ook een *constante veelterm*.

(v) Zij $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ en $b \in K$, we noteren

$$f(b) := a_m b^m + \cdots + a_1 b + a_0 \in K.$$

We noemen $b \in K$ een *wortel* van $f(x)$ als en slechts als $f(b) = 0$.

Lemma 1.2.2. (i) *De verzameling $K[x]$ met de optelling en vermenigvuldiging van veeltermen is een commutatieve ring. We noemen $K[x]$ een* veeltermenring *of* polynomenring *(over het veld K).*

(ii) *Voor alle $f(x), g(x) \in K[x]$ geldt:*

$$\begin{aligned} \deg(f(x) + g(x)) &\leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\} \\ \deg(f(x) \cdot g(x)) &= \deg f(x) + \deg g(x)\,. \end{aligned}$$

Bewijs. (i) Om aan te tonen dat $K[x]$ een ring is, moeten we gebruik maken van het feit dat K een veld is en dus voldoet aan de eigenschappen in Definitie 1.1.3 en Lemma 1.1.6. We geven wat toelichting bij enkele van de te bewijzen eigenschappen (R1)–(R7); werk zelf de details uit als oefening.

(R2) Het element $0 \in K$ is ook een element van $K[x]$ (een constante veelterm) en is het neutraal element voor de optelling in $K[x]$.

(R3) Ga na dat $(a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0) + (-a_m x^m - \cdots - a_1 x - a_0) = 0$.

(R5) Zij $f(x) = \sum_{i=0}^{m_1} a_i x^i \in K[x]$, zij $g(x) = \sum_{i=0}^{m_2} b_i x^i \in K[x]$, en zij $h(x) = \sum_{i=0}^{m_3} c_i x^i \in K[x]$. We tonen aan dat $f(x)\big(g(x)h(x)\big) = \big(f(x)g(x)\big)h(x)$. Dit is niet moeilijk, maar het is een goede oefening op het gebruik van de somnotatie.

$$\begin{aligned}
f(x)\big(g(x)h(x)\big) &= f(x) \sum_{k=0}^{m_2+m_3} \Big(\sum_{i+j=k} b_i c_j \Big) x^k \\
&= \sum_{\ell=0}^{m_1+m_2+m_3} \Big(\sum_{n+k=\ell} a_n \big(\sum_{i+j=k} b_i c_j \big) \Big) x^\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{m_1+m_2+m_3} \Big(\sum_{n+i+j=\ell} a_n (b_i c_j) \Big) x^\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{m_1+m_2+m_3} \Big(\sum_{n+i+j=\ell} (a_n b_i) c_j \Big) x^\ell \quad \text{(wegens (K5))} \\
&= \sum_{\ell=0}^{m_1+m_2+m_3} \Big(\sum_{k+j=\ell} \big(\sum_{n+i=k} a_n b_i \big) c_j \Big) x^\ell \\
&= \Big(\sum_{k=0}^{m_1+m_2} \big(\sum_{n+i=k} a_n b_i \big) x^k \Big) h(x) \\
&= \big(f(x)g(x)\big)h(x).
\end{aligned}$$

(R6) Het element $1 \in K$ is ook een element van $K[x]$ (een constante veelterm) en is het neutraal element voor de vermenigvuldiging in $K[x]$.

(ii) Dit volgt direct uit de definitie van de optelling en vermenigvuldiging. □

We bespreken beknopt nog enkele eigenschappen en definities in verband met wortels van veeltermen en delers van veeltermen.

Stelling 1.2.3. *Zij $K[x]$ de polynomenring over een veld K. Zij $f(x), g(x) \in K[x]$ met $g(x) \neq 0$. Dan zijn er polynomen $q(x), r(x) \in K[x]$ zodat*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \ \textit{met}\ r(x) = 0 \ \textit{of}\ \deg r(x) < \deg g(x).$$

Zonder bewijs. (Het bewijs gebruikt de "staartdeling" voor veeltermen, analoog aan de staartdeling in $\mathbb{Z}$. Voor de wiskundigen verwijzen we naar de cursus "Discrete Wiskunde I".) □

Een belangrijk gevolg is dat een veelterm over K een wortel a heeft in K als en slechts als de veelterm deelbaar is door $x - a$.

Gevolg 1.2.4. *Zij* $0 \neq f(x) \in K[x]$*,* K *een veld, en zij* $a \in K$*. Dan is* $f(a) = 0$ *als en slechts als* $f(x) = (x - a)q(x)$ *voor zekere* $q(x) \in K[x]$*.*

Bewijs. Het is duidelijk dat uit $f(x) = (x - a)q(x)$ volgt dat $f(a) = 0$.

Stel omgekeerd dat $f(a) = 0$. Bovenstaande stelling geeft dat

$$f(x) = (x - a)q(x) + r(x),$$

met $\deg r(x) < \deg(x - a) = 1$ of $r(x) = 0$, met andere woorden, $r(x)$ is een constante veelterm. Uit $0 = f(a) = r(a)$ volgt dan $r(x) = 0$, bijgevolg is $f(x) = (x - a)q(x)$. $\square$

Definitie 1.2.5. (i) Zij $f(x), g(x) \in K[x]$. Dan is $g(x)$ een *deler* van $f(x)$ als en slechts als er een $q(x) \in K[x]$ bestaat waarvoor $f(x) = g(x)q(x)$.

(ii) Zij $f(x) \in K[x]$, en zij a een wortel van $f(x)$. Dan is

$$f(x) = (x - a)^k q(x)$$

voor een bepaalde $k \in \mathbb{N}$ ($k \geq 1$) en $q(x) \in K[x]$ met $q(a) \neq 0$. We noemen k de *multipliciteit* van de wortel a.

(iii) Zij $f(x) \in K[x]$ een veelterm met $\deg f(x) > 0$. We noemen $f(x)$ *reducibel* over K als $f(x) = g(x)h(x)$ met $g(x), h(x) \in K[x]$, waarbij $\deg g(x) < \deg f(x)$ en $\deg h(x) < \deg f(x)$. We noemen f *irreducibel* als f niet reducibel is.

De volgende stelling staat gekend als de *grondstelling van de algebra.*

Stelling 1.2.6. *Zij* $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ *met* $\deg f(x) \geq 1$*. Dan heeft* $f(x)$ *een wortel in* $\mathbb{C}$*.*

Zonder bewijs. (Voor de wiskundigen wordt dit bewezen in de cursus "Algebra II".) $\square$

Gevolg 1.2.7. *Zij* $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ *een monische veelterm met* $\deg f(x) \geq 1$*. Dan is* $f(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - a_i)^{n_i}$ *voor* $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ *en* $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$*.*

Bewijs. Dit volgt uit Stelling 1.2.6 en Gevolg 1.2.4. $\square$

1.3 Matrices

We veronderstellen dat de lezer reeds vertrouwd is met matrices over $\mathbb{Q}$ of over $\mathbb{R}$. We definiëren matrices over een willekeurig veld K.

Definitie 1.3.1. Zij K een veld.

(1) Zij $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Een $m \times n$-*matrix* is een rechthoekig schema van elementen van K dat bestaat uit m *rijen* en n *kolommen*. Dit wordt op de volgende manier genoteerd:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

met $a_{ij} \in K$ voor alle $1 \leq i \leq m$ en $1 \leq j \leq n$. De scalairen a_{ij} noemen we de *componenten* of *elementen* van de matrix. Soms wordt ook de notatie met vierkante haken

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

gebruikt; er is geen enkel verschil in betekenis met de notatie met ronde haken die wij zullen hanteren.

(2) De verzameling van alle $m \times n$-matrices over K noteren we met $M_{m,n}(K)$ of $\mathrm{Mat}_{m,n}(K)$.

(3) Wanneer $n = m$ noteren we $M_{n,n}(K)$ als $M_n(K)$ of als $\mathrm{Mat}_n(K)$. We noemen deze matrices de *vierkante* matrices.

We zullen vaak gebruik maken van volgende notaties om matrices voor te stellen.

Notatie 1.3.2. De matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$$

noteren we ook op de volgende manieren:

(1) $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ of $A = (a_{ij})_{i,j}$ of kortweg $A = (a_{ij})$, met $a_{ij} \in K$.

(2) $A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$ of $A = (A_1, \ldots, A_n)$, met $A_i \in M_{m,1}(K)$ de kolommen van A voor $1 \leq i \leq n$.

(3) $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$ met $A_j \in M_{1,n}(K)$ de rijen van A voor $1 \leq j \leq m$.

We definiëren enkele bijzondere types matrices.

Definitie 1.3.3. Zij K een veld, $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(i) De *nulmatrix* is de matrix $(a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ met $a_{ij} = 0$ voor alle i, j. We noteren deze matrix als $0_{m,n}$ of gewoon 0; als $m = n$ gebruiken we ook 0_n.

(ii) Een matrix in $M_{m,1}(K)$ wordt een *kolommatrix* genoemd. Een matrix in $M_{1,n}(K)$ wordt een *rijmatrix* genoemd.
We noteren $K^m := M_{m,1}(K)$ voor de verzameling van de kolommatrices.

(iii) Een matrix $(a_{ij}) \in M_n(K)$ is een *diagonaalmatrix* als $a_{ij} = 0$ voor alle $i \neq j$. We noteren de diagonaalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ook met $\mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$.

(iv) De *eenheidsmatrix* is de matrix $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1) \in M_n(K)$. We noteren deze matrix als I_n.

(v) De matrix $(a_{ij}) \in M_n(K)$ is een *bovendriehoeksmatrix* als $a_{ij} = 0$ voor alle $i > j$.

(vi) De matrix $(a_{ij}) \in M_n(K)$ is een *onderdriehoeksmatrix* als $a_{ij} = 0$ voor alle $i < j$.

(vii) De matrix $(a_{ij}) \in M_n(K)$ is *symmetrisch* als $a_{ij} = a_{ji}$ voor alle i, j.

(viii) De matrix $(a_{ij}) \in M_n(K)$ is een *blokdiagonaalmatrix* met *blokken* $A_1, \ldots, A_k$, als A van de vorm

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

is, met A_i een $n_i \times n_i$ matrix voor alle i.

We kunnen matrices optellen, vermenigvuldigen met een scalair of vermenigvuldigen met elkaar. De vermenigvuldiging van matrices is een bewerking die afgeleid is van wat men de *gewogen som* noemt:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k \,.$$

Definitie 1.3.4. (1) De som van twee matrices $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ en $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ is de matrix $A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m,n}(K)$.

(2) Zij $\lambda \in K$, dan definiëren we het (scalair) product van de matrix $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ met de scalair λ als de matrix $\lambda A := (\lambda a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$.

(3) Het product van twee matrices $A = (a_{ij}) \in M_{m,k}(K)$ en $B = (b_{ij}) \in M_{k,n}(K)$ is gedefinieerd als $(c_{ij}) := AB \in M_{m,n}(K)$ met

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} a_{i\ell} b_{\ell j} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ik} b_{kj}.$$

Merk op dat de som van matrices enkel gedefinieerd is voor matrices met evenveel rijen en evenveel kolommen. Het product AB van matrices is echter enkel gedefinieerd als A evenveel kolommen heeft als B rijen heeft. De ij-de component van AB is de gewogen som van de i-de rij van A met de j-de kolom van B. Het is een handige "vingertruc" om de ij-de component van het product te berekenen door met een vinger van de linkerhand over de i-de rij te gaan terwijl men met een vinger van de rechterhand over de j-de kolom gaat.

Opmerking 1.3.5. Een matrix $A = (A_1, \dots, A_n) \in M_{m,n}(K)$ rechts vermenigvuldigen met een kolommatrix $B \in M_{n,1}(K)$ geeft een kolommatrix die gelijk is aan een som van scalaire veelvouden van de kolommen van A:

$$(A_1, \dots, A_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 A_1 + \cdots + b_n A_n.$$

Een matrix $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$ links vermenigvuldigen met een rijmatrix $A \in M_{1,m}$ geeft een rijmatrix die gelijk is aan een som van scalaire veelvouden van de kolommen van B :

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_m \end{pmatrix} B = a_1 B_1 + \cdots + a_m B_m.$$

Merk op dat het product van twee $n \times n$-matrices opnieuw een $n \times n$-matrix is. In feite vormt, voor elke n, de verzameling van alle vierkante $n \times n$-matrices over K een ring. Meer bepaald hebben we het volgend resultaat.

Lemma 1.3.6. *Zij K een veld en $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*

(i) *De verzameling van de matrices $M_{m,n}(K)$ met als operatie de matrixoptelling is een groep, met de nulmatrix $0_{m,n}$ als neutraal element.*

(ii) *De verzameling van de matrices $M_n(K)$ is een ring. Het neutraal element voor de optelling is de nulmatrix 0_n en het neutraal element voor de vermenigvuldiging is de eenheidsmatrix I_n.*

(iii) *Voor alle $A, B \in M_{m,n}(K)$, $\lambda, \mu \in K$ is*

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A), \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$$

(iv) *Voor alle $A \in M_{m,k}(K)$, $B \in M_{k,n}(K)$ en $\lambda \in K$ is*

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

Bewijs. Deze eigenschappen volgen rechtstreeks uit de definities van optelling en vermenigvuldiging van matrices. We moeten natuurlijk gebruik maken van de eigenschappen van het veld K.

Eigenschappen (G3) en (R3) volgen uit het feit dat $(a_{ij}) + (-a_{ij}) = (a_{ij} + (-a_{ij})) = 0$. We werken de lastigste eigenschap (R5) volledig uit, en laten het bewijs van de andere eigenschappen als oefening.

Zij dus $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in M_n(K)$; we tonen aan dat $A(BC) = (AB)C$. We hebben

$$\begin{aligned}
A(BC) &= A\Big(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj}\Big)_{1 \le i,j \le n} \\
&= \Big(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\big(\sum_{k=1}^{n} b_{\ell k}c_{kj}\big)\Big)_{1 \le i,j \le n} \\
&= \Big(\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}(b_{\ell k}c_{kj})\Big)_{1 \le i,j \le n} \\
&= \Big(\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} (a_{i\ell}b_{\ell k})c_{kj}\Big)_{1 \le i,j \le n} \qquad \text{(wegens (K5))} \\
&= \Big(\sum_{k=1}^{n}\big(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k}\big)c_{kj}\Big)_{1 \le i,j \le n}
\end{aligned}$$

$$= \Big(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell j}\Big)_{1\leq i,j\leq n} C$$
$$= (AB)C. \qquad \square$$

Opmerking 1.3.7. Merk op dat de ring $M_n(K)$ niet commutatief is! We geven een voorbeeld van twee vierkante matrices waarvoor $AB \neq BA$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ maar } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definitie 1.3.8. (i) Zij K een veld en $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Een matrix $A \in M_n(K)$ is *inverteerbaar* als en slechts als er een matrix $B \in M_n(K)$ bestaat waarvoor $AB = BA = I_n$.

(ii) Als de matrix $A \in M_n(K)$ inverteerbaar is, dan is de matrix B met $AB = BA = I_n$ uniek bepaald. We noemen de matrix B de *inverse matrix* of kortweg de *inverse* van A en noteren deze met A^{-1}.

(iii) De verzameling van de inverteerbare matrices noteren we met $\mathsf{GL}_n(K)$.

Lemma 1.3.9. (i) *De verzameling $\mathsf{GL}_n(K)$ met als bewerking de matrixvermenigvuldiging is een groep. Het neutrale element is I_n.*

(ii) *Zij $A, B \in \mathsf{GL}_n(K)$. Dan is $(A^{-1})^{-1} = A$ en $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Bewijs. Oefening (gebruik Lemma 1.3.6). $\square$

Lang niet iedere niet-nulmatrix is inverteerbaar.

Voorbeeld 1.3.10. Veronderstel dat de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(K)$$

inverteerbaar zou zijn; dan bestaat er een $B \in M_2(K)$ waarvoor $AB = BA = I_2$. We tonen aan dat dit tot een tegenstrijdigheid leidt. Definieer

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(K),$$

dan is $C(AB) = CI_2 = C$. Maar aangezien $CA = 0$, is nu $C(AB) = (CA)B = 0B = 0$. Er volgt dat $0 = C$; dit is een tegenstrijdigheid. Hieruit volgt dat A niet inverteerbaar is.

Deze methode om na te gaan of een matrix al dan niet inverteerbaar is, is niet bijzonder praktisch. In Stelling 5.3.12 bewijzen we verscheidene meer bruikbare criteria om na te gaan of een matrix inverteerbaar is. We bekijken ook verscheidene methodes om het inverse van een inverteerbare matrix te bepalen.

Een ander zinvol begrip is het transponeren van een matrix.

Definitie 1.3.11. Zij $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$. We definiëren de matrix $A^t = (b_{k\ell}) \in M_{n,m}(K)$ als $b_{ji} := a_{ij}$ voor alle $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. We noemen de matrix A^t de *getransponeerde matrix* van de matrix A.

De rijen van A worden dus de kolommen van A^t en de kolommen van A worden de rijen van A^t.

Voorbeeld 1.3.12.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

We vermelden de volgende rekenregels voor de getransponeerde matrix.

Lemma 1.3.13. (i) *Voor alle* $A, B \in M_{m,n}(K)$ *is* $(A+B)^t = A^t + B^t$.

(ii) *Voor alle* $A \in M_{m,n}(K)$ *is* $(A^t)^t = A$.

(iii) *Voor alle* $A \in M_{m,k}(K), B \in M_{k,n}(K)$ *is* $(AB)^t = B^t A^t$.

(iv) *Voor alle* $A \in \mathsf{GL}_n(K)$ *is* $A^t \in \mathsf{GL}_n(K)$ *en* $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Bewijs. Oefening. □

Notatie 1.3.14. We zullen het transponeren van matrices ook gebruiken als een notatie. We zullen een kolommatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n = M_{n,1}(K)$$

dikwijls noteren als $(a_1 \cdots a_n)^t$ of $(a_1, \ldots, a_n)^t$.

1.4 Stelsels van lineaire vergelijkingen

Een voorbeeld van een stelsel van 3 lineaire vergelijkingen in 3 onbekenden x, y, z over het veld $\mathbb{Q}$ is

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + 2z = -1 \\ 3x - y + 5z = 1. \end{cases}$$

Door het elimineren van variabelen kunnen we de oplossingen van dit stelsel bepalen. Er blijken oneindig veel oplossingen te zijn: voor iedere $t \in \mathbb{Q}$ is $x = -\frac{3}{2}t + 1$, $y = \frac{1}{2}t + 2$, $z = t$ een oplossing van het stelsel.

In deze paragraaf ontwikkelen we een systematische methode om een willekeurig stelsel van m lineaire vergelijkingen in n onbekenden over een willekeurig veld K op te lossen.

Definitie 1.4.1. (i) Zij K een veld. Een stelsel over K van m lineaire vergelijkingen met n onbekenden[7] $x_1, x_2, \dots, x_n$ is een collectie van m lineaire vergelijkingen over dezelfde n onbekenden, i.e. vergelijkingen van de vorm

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

waar $a_{ij} \in K$ voor alle $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ en $b_i \in K$ voor alle $1 \leq i \leq m$. (Het woord *stelsel* benadrukt het feit dat we deze vergelijkingen tegelijk bekijken, en niet individueel.)

(ii) Een *oplossing* van het bovenstaand stelsel is een n-tal bestaande uit n scalairen $c_1, \dots, c_n \in K$ waarvoor geldt dat

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = b_m. \end{cases}$$

Deze oplossing noteren we vaak als $x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n$ of als $(c_1, \dots, c_n)^t$. De *oplossingsverzameling* van een stelsel lineaire vergelijkingen is de verzameling van alle oplossingen van het stelsel.

(iii) Een stelsel is *strijdig* als het geen oplossingen heeft, m.a.w. als de oplossingsverzameling gelijk is aan $\emptyset$.

(iv) Een stelsel is *homogeen* als het van de vorm

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

[7] Als er slechts een vast klein aantal onbekenden zijn worden deze ook wel genoteerd als $x, y, z, u, \dots$.

is, voor $a_{ij} \in K$ met $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. Merk op dat een homogeen stelsel nooit strijdig is: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ is namelijk steeds een oplossing.

De lineaire vergelijkingen van een stelsel kunnen we vermenigvuldigen met een scalair en bij elkaar optellen. Om een stelsel op te lossen zullen we het eerst in een eenvoudigere vorm brengen. Hiervoor is het volgend lemma van cruciaal belang.

Lemma 1.4.2. *Beschouw een stelsel van m lineaire vergelijkingen met n onbekenden over het veld K. We noteren de vergelijkingen van dit stelsel als $R_1, \ldots, R_m$.*

We construeren een nieuw stelsel van m lineaire vergelijkingen met n onbekenden over het veld K door één van de volgende operaties toe te passen:

(1) *een vergelijking R_i vervangen door de vergelijking $R_i + \lambda R_j$ voor een bepaalde $1 \leq i \neq j \leq m$ en $\lambda \in K$;*

(2) *twee vergelijkingen van plaats verwisselen;*

(3) *een vergelijking R_i vervangen door cR_i voor een bepaalde $1 \leq i \leq m$ en $c \in K \setminus \{0\}$.*

De oplossingsverzameling van het oorspronkelijke stelsel is gelijk aan de oplossingsverzameling van het nieuwe stelsel.

Bewijs. We overlopen de drie verschillende operaties:

(1) Om de notatie te vereenvoudigen beschouwen we een stelsel met slechts twee vergelijkingen, maar de redenering is ook geldig in een stelsel met m vergelijkingen.
We beschouwen het stelsel

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2. \end{cases}$$

We passen operatie (1) toe door R_1 te vervangen door $R_1 + \lambda R_2$ met $\lambda \in K$; het nieuwe stelsel ziet er als volgt uit:

$$\begin{cases} (a_{11} + \lambda\, a_{21})x_1 + \cdots + (a_{1n} + \lambda\, a_{2n})x_n = b_1 + \lambda\, b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2. \end{cases}$$

Het is evident dat een oplossing van het oorspronkelijke stelsel ook een oplossing van het nieuwe stelsel is.

Stel nu omgekeerd dat $(c_1 \dots c_n)^t$ een oplossing van het nieuwe stelsel is; dan is

$$\begin{aligned}(a_{11} + \lambda\, a_{21})c_1 + \cdots + (a_{1n} + \lambda\, a_{2n})c_n = b_1 + \lambda\, b_2 \quad \text{en}\\ a_{21}c_1 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2.\end{aligned}$$

Door de eerste vergelijking min λ keer de tweede vergelijking te nemen, volgt dat ook $a_{11}c_1 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1$. Bijgevolg is $(c_1 \dots c_n)^t$ ook een oplossing van het oorsponkelijke stelsel.

(2) Het is triviaal dat het verwisselen van twee vergelijkingen de oplossingen niet beïnvloedt.

(3) Het is een eenvoudige oefening om na te gaan dat het vermenigvuldigen van een vergelijking met een constante de oplossingsverzameling niet verandert. □

Om stelsels efficiënter te noteren, zullen we een stelsel vaak noteren als een matrixvergelijking. Het stelsel van m lineaire vergelijkingen met n onbekenden over K

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

kunnen we immers veel compacter noteren als $AX = B$, waarbij A, X en B de volgende matrices zijn:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Definitie 1.4.3. Beschouw een stelsel van m lineaire vergelijkingen met n onbekenden over K, genoteerd als $AX = B$, waarbij $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{m,1}(K)$ en X de kolommatrix is met de n onbekenden.

De $m \times (n+1)$-matrix $(A\ B)$ bekomen uit A door deze aan te vullen met de kolom B, noemen we de *uitgebreide matrix* van het stelsel. We noteren de uitgebreide matrix van dit stelsel ook als $(A|B)$; de streep geeft aan dat het de uitgebreide matrix is van een stelsel.

Voorbeeld 1.4.4. We hernemen het voorbeeldstelsel uit het begin van deze paragraaf:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + 2z = -1 \\ 3x - y + 5z = 1. \end{cases}$$

In matrixnotatie noteren we dit stelsel als $AX = B$, met

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De uitgebreide matrix van dit stelsel is de 3×4-matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ook genoteerd als } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

We 'vertalen' de operaties uit Lemma 1.4.2 naar operaties op de rijen van de uitgebreide matrix van een stelsel.

Definitie 1.4.5. Zij $A \in M_{m,n}(K)$ met rijen $A_1, \ldots, A_m$. We kunnen een nieuwe matrix construeren door één van de volgende operaties toe te passen op A:

(1) de rij A_i vervangen door $A_i + \lambda\, A_j$ voor bepaalde $1 \leq i, j \leq m$ en $\lambda \in K$;

(2) de rij A_i verwisselen met de rij A_j voor bepaalde $1 \leq i, j \leq m$;

(3) de rij A_i vervangen door $c\, A_i$ voor een bepaalde $1 \leq i \leq m$ en $c \in K \setminus \{0\}$.

Een dergelijke operatie noemen we een *elementaire rijoperatie* van type I, II of III respectievelijk.

Gevolg 1.4.6. *De oplossingsverzameling van een stelsel van lineaire vergelijkingen blijft dezelfde wanneer men op de uitgebreide matrix van het stelsel een eindig aantal elementaire rijoperaties na elkaar toepast.*

Bewijs. Dit volgt direct uit Lemma 1.4.2. □

Opmerking 1.4.7. De elementaire rijoperaties voor matrices in $M_{m,n}(K)$ kunnen alle verkregen worden door linkse vermenigvuldiging met een gepaste $m \times m$-matrix:

(I) de rijoperatie $A_i \rightsquigarrow A_i + \lambda\, A_j$ wordt verkregen door linkse vermenigvuldiging met de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

i.e. de eenheidsmatrix I_m aangevuld met een λ op de (i, j)-de positie.

(II) de rijoperatie $A_i \leftrightsquigarrow A_j$ wordt verkregen door linkse vermenigvuldiging met de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

i.e. de eenheidsmatrix I_m waarbij de 1'en op de (i,i)-de en de (j,j)-de positie vervangen werden door 0, en de 0'en op de (i,j)-de en de (j,i)-de positie vervangen werden door 1.

(III) de rijoperatie $A_i \rightsquigarrow c\,A_i$ wordt verkregen door linkse vermenigvuldiging met de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & c & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i.e. de eenheidsmatrix I_m waarbij de 1 op de (i,i)-de positie vervangen werd door c.

Als we een stelsel oplossen gaan we te werk door elementaire rijoperaties op de uitgebreide matrix toe te passen totdat de bekomen matrix de volgende specifieke gedaante heeft.

Definitie 1.4.8. Een matrix $A \in M_{m,n}(K)$ is een *rij-echelonmatrix* als de volgende drie voorwaarden voldaan zijn:

- Iedere rij is van de vorm $(0 \cdots 0)$, $(1 * \cdots *)$ of $(0 \cdots 0\ 1 * \cdots *)$, waar de sterretjes willekeurige scalairen voorstellen.
- Het eerste niet-nul element van de $(i+1)$-de rij ligt rechts van het eerste niet-nul element van de i-de rij; de nulrijen staan onderaan in de matrix.
- De elementen boven het eerste niet-nul element van iedere rij zijn allemaal gelijk aan nul.

Als een rij niet volledig gelijk is aan nul, wordt de plaats waar het eerste niet-nul element staat (dit is altijd een 1) een *spilplaats* of een *pivotplaats* genoemd. Een kolom waarin een spilplaats voorkomt noemen we een *spilkolom* of een *pivotkolom*.

Als A een rij-echelonmatrix is, zeggen we ook dat A in *rij-echelonvorm* staat. Aangezien we hier enkel rij-echelonmatrices beschouwen en geen kolom-echelonmatrices, hebben we het korter over *echelonmatrices* of matrices in *echelonvorm*.

Voorbeeld 1.4.9. We geven enkele voorbeelden van rij-echelonmatrices in $M_{3,4}(\mathbb{Q})$. De spilplaatsen zijn omcirkeld:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Een algemener voorbeeld van een rij-echelonmatrix in $M_{4,n}(K)$ is

$$\begin{pmatrix} 1 & *\cdots* & 0 & *\cdots* & 0 & *\cdots* & 0 & *\cdots* \\ 0 & 0\ldots0 & 1 & *\cdots* & 0 & *\cdots* & 0 & *\cdots* \\ 0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 1 & *\cdots* & 0 & *\cdots* \\ 0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 1 & *\cdots* \end{pmatrix},$$

waar een sterretje een willekeurige scalair voorstelt. Als men in de bovenstaande matrix onderaan een nulrij plaatst blijft de matrix in echelonvorm.

Stelling 1.4.10. *Zij $A \in M_{m,n}(K)$. Men kan altijd een echelonmatrix bekomen door een eindig aantal opeenvolgende elementaire rijoperaties op A toe te passen.*

Bewijs. Aangezien de nulmatrix reeds in rij-echelonvorm staat, veronderstellen we dat $A \neq 0$. We gaan te werk in verschillende stappen:

Stap 1. Zoek de eerste kolom van A waarin een niet-nul element staat, noem deze kolom K_j.

Stap 2. Verwissel rijen, door rijoperaties van type II te gebruiken, zodat een niet-nul element in de bovenste rij R_i komt, noem dit $c \in K \setminus \{0\}$.

Stap 3. Maak van die niet-nul component c een 1 door een rijoperatie van type III te gebruiken: vermenigvuldig R_i met c^{-1}.

Stap 4. Gebruik verschillende rijoperaties van type I om de elementen onder deze 1 nul te maken: alle rijen R_k met $k \leq i$ laten we staan, alle rijen R_k met $k > i$ vervangen we door de rij $R_k - a_{kj}R_j$.

Stap 5. De matrix A heeft nu de gedaante

$$\begin{pmatrix} 0\ldots 0 & 1 & *\cdots * \\ 0\ldots 0 & 0 & *\cdots * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\ldots 0 & 0 & *\cdots * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & B \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}.$$

We passen nu stappen 1 tot 4 recursief toe op de matrix D, totdat er rechtsonder de laatst gevonden pivotplaats enkel nog nullen staan, of deze pivotplaats helemaal onderaan of helemaal rechts in de matrix staat.

Stap 6. We maken ten slotte alle elementen boven elke pivotplaats nul door rijoperaties van type I toe te passen.

De matrix die we nu bekomen hebben is in echelonvorm. □

Opmerking 1.4.11. Het bewijs van voorgaande stelling is een constructief bewijs. Dit betekent dat we het bewijs kunnen toepassen om in de praktijk een matrix in een echelonmatrix om te zetten met behulp van elementaire rijoperaties. Hieronder werken we dit uit op een voorbeeld, in de oefeningenlessen worden nog heel wat meer voorbeelden besproken.

Deze techniek om een matrix naar rijechelonvorm te brengen noemen we ook *rijreductie*.

Voorbeeld 1.4.12. We gaan verder met het voorbeeld 1.4.4. We passen de methode uit het bewijs van Stelling 1.4.10 toe op de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aangezien het element linksboven reeds een 1 is, kunnen we direct overgaan naar Stap 4. Vervang R_2 door $R_2 - 1R_1$; dit geeft

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vervang nu R_3 door $R_3 - 3R_1$; dit geeft

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Stap 4 is voltooid. We gaan verder met Stap 5 en werken dus verder met het omkaderde stuk van de matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} -2 & 1 & -4 \\ -4 & 2 & -8 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Stap 1 en Stap 2 zijn reeds in orde, het element linksboven is namelijk verschillend van nul. We gaan verder met Stap 3 en vervangen R_2 door $(-2)^{-1}R_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ -4 & 2 & -8 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Nu gaan we verder met Stap 4 en vervangen R_3 door $R_3 + 4R_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

We moeten niet opnieuw Stap 5 doorlopen want er staat een nulmatrix rechtsonder de laatst verkregen 1. We gaan verder met Stap 6, we vervangen dus R_1 door $R_1 - R_2$ en krijgen de echelonmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wanneer de uitgebreide matrix van een stelsel een rijechelon matrix is, kunnen we de oplossing van het stelsel direct aflezen.

Stelling 1.4.13. *Zij $AX = B$ een stelsel van m lineaire vergelijkingen in n onbekenden over K, met $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{m,1}(K)$ en X een kolommatrix met de n onbekenden. Veronderstel dat de uitgebreide matrix $(A|B)$ een echelonmatrix is.*

(i) *Als de laatste kolom van $(A|B)$ een spilkolom is, is het stelsel strijdig.*

(ii) *Als de laatste kolom van $(A|B)$ geen spilkolom is, heeft het stelsel wel oplossingen. Zij $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ de verzameling van indices van alle spilkolommen van A. De oplossingen van het stelsel kunnen we als volgt beschrijven:*

De onbekenden x_i met $i \notin S$ worden vrij gekozen in K, stel $x_i = t_i \in K$. De onbekenden x_j met $j \in S$ zijn dan bepaald door

$$x_j = b_\ell - \sum_{k>j \text{ en } k\notin S}^{n} a_{\ell k} t_k, \tag{$*$}$$

waar ℓ het nummer van de rij van de spilplaats in de j^{e}-kolom is.

Bewijs. (i) Als de laatste kolom van $(A|B)$ een spilkolom is, betekent dit dat $(A|B)$ een rij bevat die gelijk is aan $(0\ldots 0|1)$. Dit betekent dat het stelsel de vergelijking $0\,x_1 + \cdots + 0\,x_n = 1$ bevat; deze vergelijking heeft geen oplossingen. Het stelsel is dus strijdig.

(ii) Dit volgt uit de specifieke vorm van een echelonmatrix. In het bijzonder is $(*)$ precies de ℓ-de vergelijking van het stelsel. Merk hierbij op dat enerzijds $a_{\ell j} = 1$, want dit is precies het element op een spilplaats, en dat anderzijds $a_{\ell k} = 0$ voor alle $k < j$ en voor alle $k \in S$. □

We kunnen dus aan de echelonvorm van de uitgebreide matrix aflezen 'hoeveel' oplossingen een stelsel heeft.

Gevolg 1.4.14. *Zij $AX = B$ een niet-strijdig stelsel met uitgebreide matrix $(A|B)$ in echelonvorm. Het aantal vrij te kiezen onbekenden is gelijk aan het aantal onbekenden min het aantal spilkolommen.*

Bewijs. Dit volgt rechtstreeks uit de voorgaande stelling. □

Opmerking 1.4.15. (i) Als de echelonvorm van de uitgebreide matrix een nulrij bevat, levert deze rij geen extra informatie op over de oplossingen van het stelsel. Een nulrij betekent namelijk dat $0\,x_1 + \cdots + 0\,x_n = 0$, dit is waar voor alle scalairen.

(ii) Uit het voorgaande gevolg volgt dat een stelsel exact één oplossing heeft als en slechts als iedere kolom van A een spilkolom is in $(A|B)$ en B geen spilkolom is. Enkel in dit geval is er een oplossing maar kunnen er geen onbekenden vrij gekozen worden.

(iii) De vorm van iedere oplossing die gegeven wordt in Stelling 1.4.13 is niet uniek. Je kan eventueel ook bepaalde x_j met $j \in S$ vrij kiezen en dan andere x_i met $i \notin S$ uitdrukken in functie van de gekozen onbekenden.

Voorbeeld 1.4.16. We gaan verder met het stelsel uit het begin van de paragraaf. In Voorbeeld 1.4.12 hebben we de echelonvorm van de uitgebreide matrix bepaald. We lezen nu de oplossingen van het stelsel af met behulp van de voorgaande stelling. De echelonvorm is gelijk aan (met de spilplaatsen omcirkeld)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

De laatste kolom is geen spilkolom dus het stelsel heeft oplossingen. De verzameling van indices van spilkolommen is $S = \{1, 2\}$. We stellen dus $x_3 = k \in K$, dan is $x_2 = 2 + \frac{1}{2}k$ en $x_1 = 1 - \frac{3}{2}k$. De oplossingsverzameling is gelijk aan $\{(1 - \frac{3}{2}k, 2 + \frac{1}{2}k, k)^t \mid k \in K\}$.

Tot slot vatten we samen hoe men de oplossingsverzameling van een willekeurig stelsel lineaire vergelijkingen kan bepalen:

(1) Bepaal de uitgebreide matrix $(A|B)$ van het stelsel.

(2) Breng de uitgebreide matrix in echelonvorm met behulp van het constructief bewijs van Stelling 1.4.10. Uit Gevolg 1.4.6 volgt dat de oplossingsverzameling van het stelsel hierdoor ongewijzigd blijft.

(3) Gebruik Stelling 1.4.13 om de oplossingsverzameling van het stelsel af te lezen.

Merk op dat deze methode neerkomt op het systematisch elimineren van zoveel mogelijk onbekenden.

Hoofdstuk

2 Vectorruimten

2.1 Vectorruimten

We gaan nu van start met een algemene studie van vectorruimten. Onze definitie is geïnspireerd op de eigenschappen die we in Hoofdstuk 0 hebben vastgesteld voor $\mathbb{R}^n$ uitgerust met de optelling en de scalaire vermenigvuldiging.

Definitie 2.1.1. Een *vectorruimte over een veld* K (of een K*-vectorruimte*) is een verzameling V met twee bewerkingen: de optelling

$$V \times V \to V\colon (v, w) \mapsto v + w,$$

en de vermenigvuldiging met scalairen

$$K \times V \to V\colon (\lambda, v) \mapsto \lambda v,$$

die aan de volgende eigenschappen voldoen:

(V1) Voor alle $v, w, u \in V$ is $(v + w) + u = v + (w + u)$.

(V2) Er bestaat een $0_V \in V$ zodat voor alle $v \in V$ geldt dat $v + 0_V = 0_V + v = v$.

(V3) Voor alle $v \in V$ bestaat er een element $w \in V$ zodat $v+w = w+v = 0_V$.

(V4) Voor alle $v, w \in V$ geldt dat $v + w = w + v$.

(V5) Voor alle $v \in V$ en alle $\lambda, \mu \in K$ geldt $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$.

(V6) Voor alle $v \in V$ is $1v = v$ (hier is $1 \in K$ het neutraal element voor de vermenigvuldiging in K).

(V7) Voor alle $v, w \in V$ en alle $\lambda, \mu \in K$ is $(\lambda+\mu)v = \lambda v+\mu v$ en $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$.

De eigenschappen (V1)–(V4) drukken uit dat V met als bewerking de optelling een abelse groep is.

Voorbeelden 2.1.2. (1) Zij K een willekeurig veld, en stel $V = \{0\}$. Dan vormt V, met als optelling $0 + 0 = 0$ en als scalaire vermenigvuldiging

$\lambda 0 = 0$ voor alle $\lambda \in K$, een vectorruimte over K. We noemen dit de *nulruimte* (over K).

(2) Het standaardvoorbeeld van een vectorruimte over een veld K is de *kolommenruimte*

$$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in K \right\}$$

met de componentsgewijze optelling en vermenigvuldiging met scalairen

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}.$$

Merk op dat dit een rechtstreekse veralgemening is van de vectorruimte $\mathbb{R}^n$ die we in Hoofdstuk 0 hebben ingevoerd. Het rekenen en redeneren in K^n verloopt dan ook geheel analoog als in $\mathbb{R}^n$.

(3) De verzameling van veeltermen in één variabele over een veld K,

$$K[x] := \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i x^i \mid d \in \mathbb{N}, a_i \in K \right\}$$

vormt een vectorruimte over K. (Ga dit zelf na als oefening.)

(4) Zij K een veld, en stel $V = M_{m,n}(K)$, de verzameling van $m \times n$-matrices, met de som en de scalaire vermenigvuldiging zoals gedefinieerd in Definitie 1.3.4. Dan is V een vectorruimte over K; dit volgt uit Lemma 1.3.6(i) en (iii).

(5) Het veld K zelf is een K-vectorruimte met als scalaire vermenigvuldiging de vermenigvuldiging van K.

(6) Het volgend voorbeeld laat zien dat de elementen van een vectorruimte zelf "ingewikkeldere" objecten kunnen zijn. (Dit idee zal later ook van belang zijn als we ruimten van homomorfismen en duale ruimten zullen bespreken.)
Zij K een veld, zij X een niet-lege verzameling, en beschouw de nieuwe verzameling

$$\mathbf{F} := \{f : X \to K\}$$

van alle mogelijke functies van X naar K. We voorzien $\mathbf{F}$ met de bewerkingen "optelling" en "scalaire vermenigvuldiging" als volgt. Veronderstel dat f en g twee willekeurige elementen van $\mathbf{F}$ zijn, m.a.w. twee willekeurige functies van X naar K. Dan definiëren we een nieuwe functie $f+g\colon X \to K$ (en dus $f+g \in \mathbf{F}$) door het voorschrift

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{voor alle } x \in X.$$

Veronderstel nu dat f een willekeurig element van $\mathbf{F}$ is en $\lambda \in K$ een willekeurige scalair; dan definiëren we een nieuwe functie $\lambda f\colon X \to K$ (en dus $\lambda f \in \mathbf{F}$) door het voorschrift

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad \text{voor alle } x \in X.$$

Deze bewerkingen maken van $\mathbf{F}$ een K-vectorruimte. Ga zelf na dat (V1)–(V7) inderdaad voldaan zijn. We merken op dat het element $0_{\mathbf{F}}$ dat nodig is in (V2) hier gegeven wordt door de nulafbeelding, i.e.

$$0_{\mathbf{F}}\colon X \to K\colon x \mapsto 0.$$

De volgende rekenregels in vectorruimten zullen we zeer vaak gebruiken:

Lemma 2.1.3. *Zij V een K-vectorruimte. We noteren het neutraal element voor de optelling in K met 0_K en het neutraal element voor de optelling in V met 0_V.*

(i) *Het neutraal element in V voor de optelling in V is uniek.*

(ii) *Elke $v \in V$ heeft een uniek tegengestelde voor de optelling; we noteren het als $-v$.*

(iii) *Voor alle $v \in V$ is $-(-v) = v$.*

(iv) *Voor alle $\lambda \in K$ is $\lambda 0_V = 0_V$.*

(v) *Voor alle $v \in V$ is $0_K v = 0_V$.*

(vi) *Voor alle $v \in V$ is $(-1)v = -v$. Bovendien geldt, voor alle $v \in V$ en $\lambda \in K$, dat*

$$(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v), \ \lambda v = (-\lambda)(-v), \ -(v+w) = -v + (-w).$$

(vii) *Als voor een $v \in V$ en $\lambda \in K$ geldt dat $\lambda v = 0$, dan is $\lambda = 0_K$ of $v = 0_V$.*

Bewijs. Oefening. (Dit wordt besproken in de oefeningenlessen.) □

Opmerking 2.1.4. (i) In het vorige lemma hebben we een verschillende notatie gebruikt voor $0_K \in K$ en $0_V \in V$. Vanaf nu zullen we deze twee nulelementen beide met 0 noteren; uit de context is het steeds duidelijk of er 0_K of 0_V bedoeld wordt.

(ii) We definiëren de aftrekking voor alle $v, w \in V$ als

$$v - w := v + (-w) = (-w) + v = -w + v.$$

Definitie 2.1.5. Een deelverzameling W van een K-vectorruimte V noemt men een *deelruimte* van V als W zelf een vectorruimte is voor de operaties van V; we noteren dit dan als $W \leq V$.

Opmerking 2.1.6. We benadrukken dat het symbool $\leq$ hier een notatie is, en niet zomaar mag gebruikt worden zoals we dit symbool zouden gebruiken voor getallen. In het bijzonder kunnen twee deelruimten $U \leq V$ en $W \leq V$ gerust tegelijk voldoen aan $U \nleq W$ én $W \nleq U$.

Het volgend criterium om na te gaan wanneer een deelverzameling een deelruimte is, is zeer eenvoudig maar zeer belangrijk.

Lemma 2.1.7. *Zij K een veld en V een K-vectorruimte, en zij $W \subseteq V$ een deelverzameling van V. Dan is W een deelruimte van V als en slechts als*

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W$$

voor alle $w_1, w_2 \in W$ en voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in K$.

Bewijs. Veronderstel eerst dat W een deelruimte is van V. Dit betekent precies dat W een vectorruimte is, met als optelling de (restrictie van) de optelling op V en als scalaire vermenigvuldiging de (restrictie van) de scalaire vermenigvuldiging van V. Hieruit volgt dat als $w_1, w_2 \in W$ en $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, het element $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ opnieuw in W zit.

Veronderstel omgekeerd dat W een deelverzameling is van V die voldoet aan de eigenschap dat $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W$ voor alle $w_1, w_2 \in W$ en voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in K$.

We merken eerst op dat als we $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ kiezen, er volgt dat $w_1 + w_2 \in W$ voor alle $w_1, w_2 \in W$. Hieruit volgt dat de optelling een bewerking van $W \times W \to W$ is.

Als we nu $\lambda_2 = 0$ kiezen, volgt er dat $\lambda_1 w_1 \in W$ voor alle $\lambda_1 \in K$ en $w_1 \in W$. Hieruit volgt dat de scalaire vermenigvuldiging een bewerking van $K \times W \to W$ is.

We gaan na dat de eigenschappen van een vectorruimte in Definitie 2.1.1 voldaan zijn voor W, met als optelling de (restrictie van) de optelling op V en als scalaire vermenigvuldiging de (restrictie van) de scalaire vermenigvuldiging van V.

De eigenschappen (V1) en (V4)–(V7) gelden automatisch, want $W \subseteq V$. We verifiëren de twee resterende eigenschappen:

(V2) Als we $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ kiezen, volgt uit Lemma 2.1.3(v) dat $0w_1 + 0w_2 = 0 \in W$. Aangezien $W \subseteq V$ is ook $0 + w = w + 0 = w$ voor alle $w \in W$.

(V3) Uit Lemma 2.1.3(vi) volgt dat $v + (-1)v = 0$ voor alle $v \in V$. Stel nu dat $w \in W$, dan is $(-1)w \in W$ (stel $\lambda_1 = 0$ en $\lambda_2 = -1$). □

Ga zelf aan de hand van het criterium in het voorgaande lemma na dat de volgende voorbeelden van deelruimten inderdaad deelruimten zijn.

Voorbeelden 2.1.8. (1) Zij V een K-vectorruimte. Dan is de nulruimte $\{0\} \subseteq V$ een deelruimte.

(2) Zij $1 \leq m \leq n$. De verzameling

$$\{(a_1, \ldots, a_n)^t \mid a_i \in K \text{ en } a_{m+1} = \cdots = a_n = 0\} \subseteq K^n$$

vormt een deelruimte van K^n.

(3) De verzameling P_d van veeltermen in $K[x]$ van graad $\leq d$, vormt een deelruimte van $K[x]$.

(4) De verzameling van continue functies op een interval,

$$\mathbf{C} := \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ is een continue functie}\},$$

is een deelruimte van de vectorruimte $\mathbf{F} = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R}\}$ van alle functies van $[a,b]$ naar $\mathbb{R}$.

Definitie 2.1.9. Zij V een K-vectorruimte en $S \subseteq V$ een deelverzameling. Een element $v \in V$ noemt men een *lineaire combinatie* van elementen van de verzameling S als v kan geschreven worden als

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

met $\lambda_i \in K$ en $v_i \in S$, voor $i = 1, \ldots, n$.

Merk op dat voor iedere $S \subseteq V$ het nulelement $0 \in V$ een lineaire combinatie van elementen van de verzameling S is, namelijk

$$0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n.$$

Deze lineaire combinatie noemt men de *triviale combinatie* (van de elementen $v_1, \ldots, v_n$).

Voorbeeld 2.1.10. Zij $V = \mathbb{Q}^3$, en beschouw de elementen $v_1 = (1,0,0)^t$ en $v_2 = (3,2,0)^t$ in V. Dan is $(0,1,0)^t \in V$ wel een lineaire combinatie van elementen van de verzameling $\{v_1, v_2\}$, want

$$(0,1,0)^t = (-\tfrac{3}{2})\, v_1 + \tfrac{1}{2}\, v_2;$$

anderzijds is $(0,0,1)^t \in V$ geen lineaire combinatie van elementen van de verzameling $\{v_1, v_2\}$, want

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (\lambda_1 + 3\lambda_2, 2\lambda_2, 0)^t$$

heeft derde coördinaat gelijk aan 0 voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$, en kan dus nooit gelijk zijn aan $(0,0,1)^t$.

Opmerking 2.1.11. (i) We benadrukken nog eens dat een lineaire combinatie van elementen van S een *eindige* som is van elementen $\lambda_i v_i$, ook als S zelf oneindig is. We zullen geregeld een dergelijke lineaire combinatie schrijven als

$$\sum_{v \in S} \lambda_v v \tag{2.1}$$

waarbij slechts eindig veel van de λ_v verschillend van nul zijn; deze laatste voorwaarde is precies nodig om te garanderen dat er in (2.1) een eindige som staat.

(ii) We spreken vaak kortweg over "een lineaire combinatie van $v_1, \ldots, v_n$" of ook over "een lineaire combinatie van de verzameling $\{v_1, \ldots, v_n\}$" in plaats van over "een lineaire combinatie van elementen van de verzameling $\{v_1, \ldots, v_n\}$".

Definitie 2.1.12. Zij V een K-vectorruimte, en beschouw een deelverzameling $S \subseteq V$. We definiëren de verzameling $\operatorname{span}(S)$ als de verzameling bestaande uit alle lineaire combinaties van elementen van S, met andere woorden

$$\operatorname{span}(S) := \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid k \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K, v_1, \ldots, v_k \in S\}.$$

We zeggen dat $\operatorname{span}(S)$ de deelruimte *voortgebracht door* S is.

Lemma 2.1.13. *Zij V een K-vectorruimte, en zij $S \subseteq V$.*

(i) *De verzameling* $\operatorname{span}(S)$ *is een deelruimte van V.*

(ii) *Als $S \subseteq T \subseteq V$, dan is* $\operatorname{span}(S) \leq \operatorname{span}(T)$.

Bewijs. (i) Beschouw twee willekeurige elementen w_1 en w_2 in $\operatorname{span}(S)$ en twee willekeurige scalairen α en β in K. Dan is

$$w_1 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k,$$
$$w_2 = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_\ell u_\ell,$$

voor zekere $\lambda_i, \mu_i \in K$ en $v_i, u_i \in S$, en dus

$$\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha\lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha\lambda_k v_k + \beta\mu_1 u_1 + \cdots + \beta\mu_\ell u_\ell,$$

en dit heeft opnieuw de gedaante van een element in $\operatorname{span}(S)$. Uit Lemma 2.1.7 volgt dan dat $\operatorname{span}(S) \leq V$.

(ii) Het is evident dat elk element van $\operatorname{span}(S)$ ook in $\operatorname{span}(T)$ zit, dus $\operatorname{span}(S) \subseteq \operatorname{span}(T)$. Aangezien we reeds weten dat $\operatorname{span}(S)$ een deelruimte is van V, volgt hieruit dat $\operatorname{span}(S) \leq \operatorname{span}(T)$. □

Notatie 2.1.14. (i) We noteren de deelruimte $\operatorname{span}(S)$ ook met $\langle S \rangle$. Als $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$, dan schrijven we ook $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_k)$ of $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ in plaats van $\operatorname{span}(\{v_1, \ldots, v_k\})$ of $\langle \{v_1, \ldots, v_k\} \rangle$.

(ii) We noteren $\operatorname{span}(\{v\})$ ook als Kv, omdat elk element van $\operatorname{span}(\{v\})$ kan geschreven worden als λv met $\lambda \in K$.

Voorbeeld 2.1.15. Beschouw de vectorruimte K^3. Er geldt dat

$$\operatorname{span}(\{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t, (0,0,1)^t\}) = K^3$$

en dat

$$\operatorname{span}(\{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t\}) = \{(\alpha, \beta, 0)^t \mid \alpha, \beta \in K\} \leq K^3.$$

Definitie 2.1.16. Zij V een K-vectorruimte. Een deelverzameling $S \subseteq V$ noemen we een *voortbrengende verzameling* voor V als $\operatorname{span}(S) = V$. Met andere woorden, S is een voortbrengende verzameling voor V als elk element uit V een lineaire combinatie is van elementen uit S.

Voorbeeld 2.1.17. Beschouw de vectorruimte K^3. In het voorgaande voorbeeld hebben we aangetoond dat $\{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t, (0,0,1)^t\}$ een voortbrengende verzameling voor K^3 is. Ook

$$\{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t, (0,0,1)^t, (1,1,1)^t\}$$

is een voortbrengende verzameling voor K^3. De verzameling $\{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t\}$ is echter geen voortbrengende verzameling voor K^3.

Definitie 2.1.18. Zij V een K-vectorruimte met $S \subseteq V$ een deelverzameling.

(i) We noemen de verzameling S *lineair afhankelijk* als er een eindige deelverzameling $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq S$ bestaat waarvoor

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$$

met $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ waarbij $\lambda_i \neq 0$ voor minstens één $i \in \{1, \ldots, k\}$.

(ii) Als een verzameling S niet lineair afhankelijk is, noemen we S *lineair onafhankelijk*. Anders gezegd, S is lineair onafhankelijk als voor elke eindige deelverzameling $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq S$ het enkel mogelijk is dat

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$$

met $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ als $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$. Een eindige verzameling elementen is dus lineair onafhankelijk als en slechts als enkel de triviale lineaire combinatie van die elementen gelijk is aan 0.

Opmerking 2.1.19. (i) Ook hier zullen we vaak zeggen dat de elementen $v_1, \dots, v_n$ lineair (on)afhankelijk zijn, in plaats van te zeggen dat de verzameling $\{v_1, \dots, v_n\}$ een lineair (on)afhankelijke verzameling is.

(ii) Om te bewijzen dat een deelverzameling $S \subseteq V$ lineair onafhankelijk is, zullen we vaak de volgende redenering maken:
We nemen aan dat er een lineaire combinatie $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0$ is met $v_1, \dots, v_k$ willekeurige elementen van S en $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ willekeurige elementen in K, en we tonen aan dat hieruit volgt dat $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Voorbeelden 2.1.20. (1) Beschouw de vectorruimte K^n, en stel

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De deelverzameling

$$S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset K^n$$

is een lineair onafhankelijke verzameling. Inderdaad, veronderstel dat $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$ voor $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, dan volgt dat

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^t = (0, 0, \dots, 0)^t$$

en dus is $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Merk op dat S ook een voortbrengende verzameling voor K^n is.

(2) Beschouw de vectorruimte $\mathbb{Q}^3$, en stel

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dan is $S = \{u, v, w\} \subset \mathbb{Q}^3$ een lineair afhankelijke verzameling. Inderdaad, $-u + 2v - w = 0$, zodat we een niet-triviale lineaire combinatie vinden van $\{u, v, w\}$ die 0 is.

(3) Als $0 \in S \subseteq V$, dan is S lineair afhankelijk. We hebben immers dat $\lambda\, 0 = 0$ voor iedere $\lambda \in K \setminus \{0\}$.

(4) Beschouw de K-vectorruimte K. Elke deelverzameling van K bestaande uit meer dan 1 element is lineair afhankelijk. Inderdaad, stel dat $a, b \neq 0$; dan is $a^{-1}a + (-b^{-1})b = 0$.

Lemma 2.1.21. *Zij V een K-vectorruimte.*

(i) *Zij $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$, en zij $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ een lineaire combinatie met $\lambda_i \neq 0$. Dan is v_i een lineaire combinatie van de overige $m-1$ elementen.*

(ii) *Twee elementen in V zijn lineair afhankelijk als en slechts als de ene een scalair veelvoud van de andere is.*

Bewijs. (i) We hebben namelijk dat $v_i = \sum_{j \neq i} -\frac{\lambda_j}{\lambda_i} v_j$.

(ii) Noem de twee elementen v_1 en v_2. Als de ene een scalair veelvoud is van de andere, stel (zonder verlies van algemeenheid) $v_1 = \lambda v_2$ voor een zekere $\lambda \in K$, dan is $v_1 - \lambda v_2 = 0$ een niet-triviale lineaire combinatie die 0 is, en dus zijn v_1 en v_2 lineair afhankelijk.
Veronderstel omgekeerd dat v_1 en v_2 lineair afhankelijk zijn; dan is $\lambda v_1 + \mu v_2 = 0$ voor zekere λ en μ die niet beide 0 zijn. Veronderstel zonder verlies van algemeenheid dat $\lambda \neq 0$; dan is $v_1 = -\lambda^{-1}\mu v_2$, en dus is v_1 een scalair veelvoud van v_2. $\square$

2.2 Basissen

Nu we de noodzakelijke inleidende begrippen hebben ingevoerd, komen we tot het belangrijke concept van een basis van een vectorruimte.

Definitie 2.2.1. Zij V een K-vectorruimte. Een deelverzameling $\mathcal{B} \subseteq V$ is een *basis* voor V als aan de twee volgende voorwaarden voldaan is:

(1) $\mathcal{B}$ is een voortbrengende verzameling,

(2) $\mathcal{B}$ is een lineair onafhankelijke verzameling.

Voorbeelden 2.2.2. (1) De verzameling $e_1, \dots, e_n \in K^n$, zoals gedefinieerd in Voorbeeld 2.1.20(1), is een basis voor K^n; we noemen dit de *standaardbasis* voor de vectorruimte K^n.

(2) De vectorruimte K^n heeft steeds meerdere basissen (behalve als $|K| = 2$ en $n = 1$). Zo is bijvoorbeeld voor alle $\lambda \in K \setminus \{0\}$ de verzameling

$\{\lambda e_1, \dots, \lambda e_n\}$ een basis voor K^n. Als K een oneindig veld is zijn er dus zelfs oneindig veel verschillende basissen.

(3) Beschouw de vectorruimte $V = K[x]$ van veeltermen in één variabele over een veld K. Dan vormt de verzameling $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ een basis voor V.

Opmerking 2.2.3. Als T een lineair onafhankelijke verzameling is in een vectorruimte V, dan is T een basis voor de deelruimte $\operatorname{span}(T) \leq V$. Inderdaad, T is nog steeds lineair onafhankelijk in $\operatorname{span}(T)$, en T is per definitie voortbrengend voor $\operatorname{span}(T)$.

Stelling 2.2.4. *Een deelverzameling $\mathcal{B} \subseteq V$ is een basis voor V als en slechts als elk element $v \in V$ op unieke manier te schrijven is als een lineaire combinatie van de elementen uit $\mathcal{B}$.*

Bewijs. Veronderstel eerst dat $\mathcal{B}$ een basis is. Zij $v \in V$ willekeurig. Omdat $\mathcal{B}$ voortbrengend is, kunnen we v schrijven als een lineaire combinatie

$$v = \sum_{w \in \mathcal{B}} \lambda_w w \,,$$

waarbij slechts eindig veel van de $\lambda_w \in K$ verschillend van nul zijn. Veronderstel dat we v op twee manieren kunnen schrijven als een dergelijke lineaire combinatie:

$$v = \sum_{w \in \mathcal{B}} \lambda_w w = \sum_{w \in \mathcal{B}} \mu_w w \,.$$

Dan is de eindige som

$$\sum_{w \in \mathcal{B}} (\lambda_w - \mu_w) w = 0 \,,$$

en uit het feit dat $\mathcal{B}$ lineair onafhankelijk is, volgt dat $\lambda_w = \mu_w$ voor elke $w \in \mathcal{B}$. Dit bewijst de uniciteit.

Veronderstel nu omgekeerd dat elk element van V op unieke manier te schrijven is als een lineaire combinatie van de elementen van $\mathcal{B}$. Dan volgt reeds onmiddellijk dat $\mathcal{B}$ een voortbrengende verzameling is. We tonen nu aan dat $\mathcal{B}$ een lineair onafhankelijke verzameling is. Veronderstel dat er een lineaire combinatie van elementen in $\mathcal{B}$ bestaat die nul geeft, stel

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \,.$$

Anderzijds is $0 \in V$ ook te schrijven als

$$0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n = 0 \,;$$

uit de veronderstelde uniciteit volgt nu dat $\lambda_i = 0$ voor elke i, wat precies aantoont dat $\mathcal{B}$ lineair onafhankelijk is. $\square$

We zullen zien dat elke vectorruimte een basis heeft, en dat het aantal elementen van een basis uniek is (ook al is de basis zelf verre van uniek). Dit feit is van fundamenteel belang in de lineaire algebra, en heeft als gevolg dat we kunnen spreken van dimensies (zie Definitie 2.2.10 verderop).

Hoewel deze feiten gelden voor willekeurige vectorruimten, zullen we ze hier enkel aantonen voor eindig-dimensionale vectorruimten; we verwijzen de geïnteresseerde lezer naar de appendix van dit hoofdstuk (zie pagina 69 en volgende) voor de details in het algemene geval.

Definitie 2.2.5. We noemen een K-vectorruimte V een *eindig-dimensionale vectorruimte* als V een eindige voortbrengende verzameling bevat. Een vectorruimte wordt *oneindig-dimensionaal* genoemd als ze niet eindig-dimensionaal is, i.e. als elke voortbrengende verzameling voor V oneindig is.

Het volgend lemma legt een verband tussen de grootte van voortbrengende verzamelingen en lineair onafhankelijke verzamelingen.

Lemma 2.2.6. *Zij V een eindig-dimensionale K-vectorruimte met S een voortbrengende verzameling, $|S| = n \in \mathbb{N}$. Dan heeft elke lineair onafhankelijke deelverzameling van V hoogstens n elementen.*

Bewijs. Zij $U \subseteq V$ met $|U| > n$, en beschouw $n+1$ verschillende elementen $w_1, \dots, w_{n+1}$ in U. Zij $S = \{v_1, \dots, v_n\}$. Vermits $\operatorname{span}(S) = V$ geldt

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n \\ &\vdots \\ w_{n+1} &= a_{n+1,1}v_1 + \cdots + a_{n+1,n}v_n. \end{aligned}$$

Beschouw het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{n+1,1}x_{n+1} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{1n}x_1 + \cdots + a_{n+1,n}x_{n+1} = 0\,. \end{cases}$$

Aangezien het stelsel homogeen is, is $x_1 = \cdots = x_{n+1} = 0$ een oplossing. We noteren de uitgebreide matrix van dit stelsel met $(A|0)$. Aangezien $A \in M_{n,n+1}(K)$ kunnen er maximaal n spilplaatsen zijn in de uitgebreide matrix. Uit Gevolg 1.4.14 volgt dat het aantal vrij te kiezen onbekenden steeds groter dan of gelijk aan $(n+1)-n = 1$ is. Bijgevolg heeft dit stelsel meer oplossingen dan enkel de oplossing $x_1 = \cdots = x_{n+1} = 0$.

Zij $x_1 = c_1, \ldots, x_{n+1} = c_{n+1}$ een oplossing met niet alle $c_i = 0$. Dan is

$$c_1 w_1 + \cdots + c_{n+1} w_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \Big) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} c_i \Big) v_j = 0.$$

Er is dus een niet-triviale lineaire combinatie van iedere verzameling met $n+1$ elementen, of anders gezegd, elke deelverzameling van V met ten minste $n+1$ elementen is lineair afhankelijk. □

We kunnen nu het bestaan van basissen bewijzen, in de volgende sterke vorm.

Stelling 2.2.7. *Zij V een eindig-dimensionale K-vectorruimte. Zij T een lineair onafhankelijke deelverzameling van V en S een voortbrengende verzameling*[1] *die T bevat. Dan is er een basis $\mathcal{B}$ voor V zodat $T \subseteq \mathcal{B} \subseteq S$.*

Bewijs. Het bewijs is constructief: we zullen de verzameling T aanvullen met elementen van S tot we een basis verkrijgen.

Indien de elementen van T voortbrengend zijn, is T reeds een basis, en hoeven we niks meer te bewijzen. Veronderstel dus dat T niet voortbrengend is; we beweren dat we een $v \in S$ kunnen vinden zodat $T \cup \{v\}$ lineair onafhankelijk is.

Veronderstel dat dit niet zo is; dan is voor elke $v \in S$ de verzameling $T \cup \{v\}$ lineair afhankelijk, zodat we een niet-triviale lineaire combinatie

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$$

vinden, met $v_1, \ldots, v_m \in T$ en $\lambda \neq 0$ (vermits $\{v_1, \ldots, v_m\}$ een lineair onafhankelijke verzameling is). Uit Lemma 2.1.21(i) volgt dan dat $v \in \operatorname{span}(T)$, en aangezien $v \in S$ willekeurig was volgt hieruit dat $S \subseteq \operatorname{span}(T) \subseteq \operatorname{span}(S)$. Dit impliceert dat $\operatorname{span}(T) = \operatorname{span}(S) = V$, en dus zou T toch voortbrengend zijn, wat in strijd is met onze veronderstelling.

We kunnen dus T aanvullen met een $v \in S$ zodat $T \cup \{v\}$ lineair onafhankelijk is. We herhalen nu deze procedure tot T voortbrengend is (en dus een basis); dit proces eindigt zeker, omdat wegens Lemma 2.2.6 een lineair onafhankelijke verzameling een begrensd aantal elementen bevat. □

Een onmiddellijk gevolg van voorgaande stelling zegt dat elke lineair onafhankelijke verzameling kan “aangevuld worden tot een basis”, en dat elke voortbrengende verzameling kan “beperkt worden tot een basis”.

---

[1] We eisen *niet* dat S zelf eindig is.

Gevolg 2.2.8. (i) *Zij V een eindig-dimensionale K-vectorruimte, en zij $T \subseteq V$ een lineair onafhankelijke verzameling. Dan bestaat er een basis $\mathcal{B}$ voor V zodat $T \subseteq \mathcal{B}$.*

(ii) *Zij V een eindig-dimensionale K-vectorruimte, en zij $S \subseteq V$ een voortbrengende verzameling. Dan bestaat er een basis $\mathcal{B}$ voor V zodat $\mathcal{B} \subseteq S$.*

Bewijs. (i) Pas Stelling 2.2.7 toe met $S = V$ (V is immers een voortbrengende verzameling voor V).

(ii) Pas Stelling 2.2.7 toe met $T = \emptyset$ ($\emptyset$ is immers een lineair onafhankelijke verzameling van V). □

Een ander onmiddellijk gevolg van Stelling 2.2.7 is dat elke eindig-dimensionale vectorruimte een basis heeft:

Gevolg 2.2.9. *Zij $V \neq \{0\}$ een eindig-dimensionale K-vectorruimte.*

(i) *Er is een basis in V.*

(ii) *Elke basis in V is eindig, en alle basissen hebben even veel elementen.*

Bewijs. (i) Zij $0 \neq v \in V$; dan is $T = \{v\}$ een lineair onafhankelijke verzameling. Gevolg 2.2.8(i) impliceert dat er een basis bestaat (die v bevat).

(ii) Als $\mathcal{B}$ een basis is volgt uit Lemma 2.2.6 dat $|\mathcal{B}|$ eindig is. Als $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$ basissen zijn voor V dan volgt uit Lemma 2.2.6 zowel $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'|$ als $|\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}|$, dus $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$. □

Definitie 2.2.10. Zij V een eindig-dimensionale vectorruimte over een veld K. Het aantal elementen in een basis $\mathcal{B}$ voor V noemen we de *dimensie* van V; we noteren dit als $\dim V$, of ook als $\dim_K V$ als we het veld K expliciet willen vermelden. Als $\dim V = n$, dan noemen we V een *n-dimensionale* vectorruimte.

Opmerking 2.2.11. Per definitie nemen we aan dat de lege verzameling $\emptyset$ een basis is voor de nulruimte. Elke eindig-dimensionale vectorruimte heeft dan een basis, en een vectorruimte met dimensie 0 is dan de nulruimte.

Als we de dimensie van een vectorruimte V reeds kennen en we willen nagaan of een verzameling $\mathcal{B} \subseteq V$ een basis is, volstaat het om ofwel de lineair onafhankelijkheid, ofwel de voortbrengendheid, na te gaan, uiteraard op voorwaarde dat $\mathcal{B}$ het juiste aantal elementen bevat.

Stelling 2.2.12. *Zij V een n-dimensionale K-vectorruimte, en zij $S \subseteq V$ een verzameling met precies n elementen.*

(i) *Als S lineair onafhankelijk is, dan is S een basis.*

(ii) *Als S voortbrengend is, dan is S een basis.*

Bewijs. (i) Veronderstel dat S lineair onafhankelijk is. We passen Gevolg 2.2.8(i) toe en vullen S aan tot een basis $\mathcal{B}$, dus $S \subseteq \mathcal{B}$. Omdat $\dim V = n$ is $|\mathcal{B}| = n = |S|$, maar dan moet $\mathcal{B} = S$.

(ii) Veronderstel dat S voortbrengend is. We passen Gevolg 2.2.8(ii) toe en beperken S tot een basis $\mathcal{B}$, dus $\mathcal{B} \subseteq S$. Omdat $\dim V = n$ is $|\mathcal{B}| = n = |S|$, maar dan moet $\mathcal{B} = S$. □

De voorgaande stellingen blijven geldig voor oneindig-dimensionale vectorruimten, en hoewel de lineaire algebra die nodig is dezelfde is, wordt het bewijs ervan aanzienlijk moeilijker omwille van verzameling-theoretische complicaties. We verwijzen naar de appendix (paragraaf 2.6).

Stelling 2.2.13. *Zij V een oneindig-dimensionale K-vectorruimte.*

(i) *Zij T een lineair onafhankelijk deelverzameling van V en S een voortbrengende verzameling die T bevat. Dan is er een basis $\mathcal{B}$ voor V zodat $T \subseteq \mathcal{B} \subseteq S$.*

(ii) *Er is een basis in V.*

(iii) *Elke basis in V is oneindig, en alle basissen hebben even veel*[2] *elementen.*

Bewijs. Zie paragraaf 2.6 (p. 69 en volgende). □

Voorbeelden 2.2.14. (1) De nulruimte heeft dimensie 0. Een vectorruimte V niet gelijk aan de nulruimte heeft dimensie ≥ 1.

(2) De vectorruimte K^n heeft dimensie n.

(3) De K-vectorruimte $M_{m,n}(K)$ heeft dimensie mn. Immers, de matrices U_{ij} waarin er een 1 staat op de (i,j)-de plaats en waarvan alle andere componenten gelijk zijn aan nul, vormen een basis vermits elke matrix een unieke lineaire combinatie is van de U_{ij}'s:

$$A = (a_{ij}) = a_{11}U_{11} + \cdots + a_{mn}U_{mn} = \sum_{i,j} a_{ij}U_{ij}\,.$$

[2]Met "even veel" bedoelen we hier dat de kardinaliteiten dezelfde zijn, of nog, dat er een bijectie bestaat tussen elke twee basissen. Dit is sterker dan de uitspraak dat de basissen oneindig groot zijn.

(4) Beschouw de vectorruimte $K[x]$ van de veeltermen in één variabele over een veld K. Zoals we gezien hebben in Voorbeeld 2.2.2(3) is de verzameling $\{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots\}$ van alle machten van de variabele x een basis voor deze ruimte. Bijgevolg is $K[x]$ een oneindig-dimensionale vectorruimte over K. De deelruimte van veeltermen van graad $< d$ heeft dimensie d; de verzameling $\{1, x, x^2, \dots, x^{d-1}\}$ vormt een basis voor deze deelruimte.

2.3 Som en directe som van vectorruimten

Als $\mathcal{B}$ een basis is voor de n-dimensionale vectorruimte V, dan is, per definitie, elk element van V op een unieke manier te schrijven als een som van elementen uit de 1-dimensionale deelruimten Kv met $v \in \mathcal{B}$. Men zegt dat de vectorruimte V ontbonden kan worden als directe som van de 1-dimensionale deelruimten Kv.

Definitie 2.3.1. Zij V een K-vectorruimte en zij $W_1, \dots, W_k \le V$ deelruimten van V. De *som van de deelruimten* $W_1, \dots, W_k$ is gedefinieerd als

$$W_1 + \cdots + W_k := \left\{ \sum_{i=1}^{k} w_i \;\middle|\; w_i \in W_i \text{ voor alle } 1 \le i \le k \right\}.$$

Als ieder element v van $W := W_1 + \cdots + W_k$ op een unieke manier te schrijven is als $v = \sum_{i=1}^{k} w_i$ met $w_i \in W_i$, dan zeggen we dat W een *directe som van deelruimten* is en noteren dit als

$$W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k .$$

Merk op dat de (directe) som van een eindig aantal deelruimten van V opnieuw een deelruimte van V is. We noteren ook

$$\sum_{i=1}^{k} W_i := W_1 + \cdots + W_k \quad \text{en} \quad \bigoplus_{i=1}^{k} W_i := W_1 \oplus \cdots \oplus W_k.$$

Lemma 2.3.2. *Zij V een K-vectorruimte en W_1, W_2, W drie deelruimten van V. Dan is $W = W_1 \oplus W_2$ als en slechts als $W = W_1 + W_2$ en $W_1 \cap W_2 = 0$.*

Bewijs. Veronderstel eerst dat $W = W_1 \oplus W_2$; dan geldt per definitie reeds $W = W_1 + W_2$. Stel $w \in W_1 \cap W_2$; dan volgt uit $0 = 0 + 0 = w + (-w)$ dat $w = 0$, vermits de elementen van W maar op één manier te schrijven zijn als een som van een element uit W_1 en een element uit W_2.

Stel nu omgekeerd dat $W = W_1 + W_2$ en $W_1 \cap W_2 = 0$. Er moet enkel nog aangetoond worden dat elk element van W niet op twee verschillende manieren te schrijven is als een som van elementen uit W_1 en W_2. Stel $w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$ met $w_1, w_1' \in W_1$ en $w_2, w_2' \in W_2$. Dan is $w_1 - w_1' = w_2' - w_2 \in W_1 \cap W_2 = 0$, dus $w_1 = w_1'$ en $w_2 = w_2'$. □

Voorbeeld 2.3.3. Beschouw de vectorruimte $V = \mathbb{R}^3$, met deelruimten

$$\begin{aligned} W_1 &= \langle (1,0,0)^t, (0,1,0)^t \rangle, \\ W_2 &= \langle (1,2,3)^t, (2,3,4)^t \rangle, \\ W_3 &= \langle (1,1,1)^t \rangle. \end{aligned}$$

Dan is $V = W_1 + W_2$ en ook $V = W_1 + W_3$ maar $V \neq W_2 + W_3$. Bovendien is $V = W_1 \oplus W_3$, maar $V \neq W_1 \oplus W_2$ want $W_1 \cap W_2 \neq 0$.

Stelling 2.3.4. *Zij V een K-vectorruimte en W_1, W_2, W drie deelruimten van V zodat $W = W_1 \oplus W_2$.*

(i) *Als $\mathcal{B}_1$ een basis is voor W_1 en $\mathcal{B}_2$ een basis is voor W_2, dan is $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ een basis voor W.*

(ii) $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2$.

Bewijs. (i) We gaan na dat $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ een basis voor W is. We tonen eerst aan dat $\mathcal{B}$ voortbrengend is voor W. Zij $x \in W = W_1 \oplus W_2$, dan is $x = y_1 + y_2$ met $y_1 \in W_1$ en $y_2 \in W_2$. Aangezien y_1 een lineaire combinatie is van $\mathcal{B}_1$ en y_2 een lineaire combinatie is van $\mathcal{B}_2$, is $x = y_1 + y_2$ een lineaire combinatie van $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$.
Vervolgens gaan we na dat $\mathcal{B}$ lineair onafhankelijk is. Stel dat er een lineaire combinatie

$$\sum_{v \in \mathcal{B}_1} \lambda_v v + \sum_{w \in \mathcal{B}_2} \mu_w w = 0.$$

Dan is

$$\sum_{v \in \mathcal{B}_1} \lambda_v v = -\sum_{w \in \mathcal{B}_2} \mu_w w \in W_1 \cap W_2.$$

Maar aangezien $W_1 \cap W_2 = 0$ volgt dat $\sum_{v \in \mathcal{B}_1} \lambda_v v = -\sum_{w \in \mathcal{B}_2} \mu_w w = 0$. Omdat $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$ lineair onafhankelijke verzamelingen zijn, zijn alle $\lambda_v = 0$ en alle $\mu_w = 0$. We concluderen dat $\mathcal{B}$ lineair onafhankelijk is.

(ii) Dit volgt nu uit de definitie van dimensie omdat $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2|$. □

We hebben ook een soort omgekeerde van Stelling 2.3.4, waarbij we een directe som verkrijgen door een basis "in twee stukken te splitsen":

Stelling 2.3.5. *Zij V een K-vectorruimte met basis $\mathcal{B}$, en veronderstel dat $\mathcal{B}$ de* disjuncte unie *is van $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$, i.e. $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ en $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$. Dan is $V = \operatorname{span}(\mathcal{B}_1) \oplus \operatorname{span}(\mathcal{B}_2)$.*

Bewijs. Stel $W_1 := \operatorname{span}(\mathcal{B}_1)$ en $W_2 := \operatorname{span}(\mathcal{B}_2)$; we zullen aantonen dat $V = W_1 + W_2$ en $W_1 \cap W_2 = 0$.

Om aan te tonen dat $V = W_1 + W_2$ beschouwen we een willekeurige $u \in V$. Aangezien $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ voortbrengend is voor V, kunnen we u schrijven als

$$u = \sum_{v \in \mathcal{B}_1} \lambda_v v + \sum_{w \in \mathcal{B}_2} \mu_w w.$$

Stel dus $u_1 := \sum_{v \in \mathcal{B}_1} \lambda_v v \in W_1$ en $u_2 := \sum_{w \in \mathcal{B}_2} \mu_w w \in W_2$; dan is $u = u_1 + u_2 \in W_1 + W_2$.

Om aan te tonen dat $W_1 \cap W_2 = 0$ onderstellen we dat $z \in W_1 \cap W_2$. Enerzijds is $z = \sum_{v \in \mathcal{B}_1} \lambda_v v \in W_1$, en anderzijds is $z = \sum_{w \in \mathcal{B}_2} \mu_w w \in W_2$. Bijgevolg is

$$\sum_{v \in \mathcal{B}_1} \lambda_v v - \sum_{w \in \mathcal{B}_2} \mu_w w = 0,$$

en aangezien $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ lineair onafhankelijk is en $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = 0$, kan dit enkel als alle λ_v en alle μ_w gelijk zijn aan 0, en dus $z = 0$. $\square$

Ook indien $W_1 \cap W_2 \neq 0$, is het mogelijk om een formule af te leiden voor $\dim(W_1 + W_2)$. Deze formule staat bekend als de *dimensiestelling voor deelruimten* of de *dimensiestelling van Grassmann*[3] .

Stelling 2.3.6 (Dimensiestelling voor deelruimten)**.** *Zij V een eindig-dimensionale K-vectorruimte en W_1, W_2 twee deelruimten van V. Dan is*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Bewijs. We bewijzen dit door een basis van $W_1 + W_2$ op te stellen waaruit we de te bewijzen dimensie-formule kunnen aflezen. We noteren $n := \dim(W_1)$, $m := \dim(W_2)$ en $k := \dim(W_1 \cap W_2)$.

Zij $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ een basis van $W_1 \cap W_2$. Aangezien $\mathcal{C} \subseteq W_1 \cap W_2 \subseteq W_1$, volgt uit Stelling 2.2.7 dat men $\mathcal{C}$ kan uitbreiden tot een basis $\mathcal{B}_1$ van W_1. We noteren $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_{n-k}\}$. Op analoge manier kunnen we $\mathcal{C}$ ook uitbreiden tot een basis $\mathcal{B}_2$ van W_2, we noteren $\mathcal{B}_2 = \{v_1, \ldots, v_k, z_1, \ldots, z_{m-k}\}$.

[3] Hermann Günther Grassmann (1809–1877) was een Duitse polymath, die in zijn eigen tijd als taalkundige bekendstond, en nu vooral beroemd is omwille van zijn wiskundige bijdragen. Naast zijn werk als leraar middelbaar onderwijs was hij tevens natuurkundige, neohumanist en uitgever.

In de rest van dit bewijs tonen we aan dat

$$\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}, z_1, \dots, z_{m-k}\}$$

een basis is van $W_1 + W_2$.

- We gaan na dat $\mathcal{B}$ een voortbrengende verzameling voor $W_1 + W_2$ is. We nemen een willekeurig element $x \in W_1 + W_2$, dus $x = y_1 + y_2$ met $y_1 \in W_1$ en $y_2 \in W_2$. Aangezien $\mathcal{B}_1$ voortbrengend is voor W_1, is $y_1 \in \operatorname{span}(\mathcal{B}_1)$; analoog is $y_2 \in \operatorname{span}(\mathcal{B}_2)$. Hieruit volgt dat $x = y_1 + y_2 \in \operatorname{span}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \operatorname{span}(\mathcal{B})$; we besluiten dat $\mathcal{B}$ voortbrengend is voor $W_1 + W_2$.
- We gaan na dat $\mathcal{B}$ een lineair onafhankelijke verzameling is. We stellen

  $$U_1 := \operatorname{span}(w_1, \dots, w_{n-k}) \leq W_1 \quad \text{en} \quad U_2 := \operatorname{span}(z_1, \dots, z_{m-k}) \leq W_2.$$

  Merk vooreerst op dat, wegens Stelling 2.3.5, uit de constructie van $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$ volgt dat

  $$\begin{aligned} (W_1 \cap W_2) \cap U_1 = 0, \\ (W_1 \cap W_2) \cap U_2 = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

  Stel nu dat

  $$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_{n-k} w_{n-k} \\ + \gamma_1 z_1 + \cdots + \gamma_{m-k} z_{m-k} = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

  voor scalairen $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_{n-k}, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-k} \in K$, en stel

  $$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \in W_1 \cap W_2; \\ w &= \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_{n-k} w_{n-k} \in U_1 \leq W_1; \\ z &= \gamma_1 z_1 + \cdots + \gamma_{n-k} z_{m-k} \in U_2 \leq W_2. \end{aligned}$$

  dan is $v + w + z = 0$, en dus $v + w = -z \in W_1 \cap W_2$, waaruit volgt dat $z \in (W_1 \cap W_2) \cap U_2$, en uit (2.2) volgt dat $z = 0$. Analoog is $w \in (W_1 \cap W_2) \cap U_1$, en opnieuw uit (2.2) volgt dat $w = 0$. Dus $v = w = z = 0$, en omdat zowel $\mathcal{B}_1$ als $\mathcal{B}_2$ lineair onafhankelijke verzamelingen zijn, kan dit enkel als alle coëfficiënten α_i, β_i en γ_i gelijk zijn aan 0.

We hebben aangetoond dat $\mathcal{B}$ een basis is van $W_1 + W_2$. Dit bewijst het gestelde, aangezien $|\mathcal{B}| = k + (n - k) + (m - k) = n + m - k$. $\square$

Definitie 2.3.7. Zij V een K-vectorruimte en $W \leq V$ een deelruimte. Een deelruimte $W' \leq V$ is een *complement*[4] van W in V als $V = W \oplus W'$.

Merk op dat een complement van een deelverzameling niet uniek bepaald is (zie Voorbeeld 2.3.9).

Lemma 2.3.8. *Zij W, U deelruimten van een K-vectorruimte V. Als $V = W + U$ dan bestaat er een deelruimte $Y \leq U$ zodat $V = W \oplus Y$. In het bijzonder heeft elke deelruimte $W \leq V$ een complement in V.*

Bewijs. Kies een basis $\mathcal{B}_W$ voor W en een basis $\mathcal{B}_U$ voor U. We passen Stelling 2.2.7 toe (of Stelling 2.2.13(i) indien V oneindig-dimensionaal is) met $T = \mathcal{B}_W$ en $S = \mathcal{B}_W \cup \mathcal{B}_U$, en vinden een basis voor V van de vorm $\mathcal{B}_W \cup \mathcal{C}$ met $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_U$. Neem $Y = \operatorname{span}(\mathcal{C})$, dan is $Y \leq U$ en elk element van V kan op een unieke manier geschreven worden als $w + y$ met $w \in W$ en $y \in Y$, dus $V = W \oplus Y$.

De laatste uitspraak volgt uit de eerste door $U = V$ te nemen. $\square$

Voorbeeld 2.3.9. Zij V de vectorruimte $V = \mathbb{R}^2$, en beschouw de volgende deelruimten van V:

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mid a \in \mathbb{R} \right\}; \\ W_2 &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ b \end{smallmatrix}\right) \mid b \in \mathbb{R} \right\}; \\ W_3 &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} c \\ c \end{smallmatrix}\right) \mid c \in \mathbb{R} \right\}; \\ W_4 &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} d \\ 2d \end{smallmatrix}\right) \mid d \in \mathbb{R} \right\}; \end{aligned}$$

dan is elke W_i een complement van elke W_j met $j \neq i$. In het bijzonder zien we dat een complement van een deelruimte niet uniek bepaald is.

Tot nu toe hebben we het enkel gehad over de som en directe som van deelruimten van een vaste K-vectorruimte V. We definiëren nu de "uitwendige" directe som van een eindig aantal (verschillende) K-vectorruimten.

Definitie 2.3.10. Zij $W_1, \dots, W_m$ vectorruimten over K. Definieer de verzameling

$$\bigoplus_{i=1}^{m} W_i = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m = \big\{(a_1, \dots, a_m) \mid a_1 \in W_1, \dots, a_m \in W_m\big\}.$$

Definieer op $\bigoplus_{i=1}^{m} W_i$ de volgende optelling en vermenigvuldiging met scalairen,

$$(a_1, \dots, a_m) + (b_1, \dots, b_m) = (a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m)$$

[4]Merk op dat dit *niet* het verzamelingtheoretische complement $V \setminus W$ is; dit laatste is zelfs geen deelruimte.

en

$$\lambda \cdot (a_1, \ldots, a_m) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_m)$$

voor alle $a_i, b_i \in W_i$ en $\lambda \in K$.

We noemen $\bigoplus_{i=1}^m W_i$ de *directe som* van de vectorruimten $W_1, \ldots, W_m$.

Lemma 2.3.11. *Zij $W_1, \ldots, W_m$ vectorruimten over K. De verzameling $\bigoplus_{i=1}^m W_i$ met optelling en scalaire vermenigvuldiging zoals gedefinieerd in Definitie* 2.3.10*, is een K-vectorruimte.*

Bewijs. Oefening. □

Opmerking 2.3.12. Wanneer de K-vectorruimten $W_1, \ldots, W_m$ allemaal deelruimten zijn van een bepaalde vectorruimte V dan noemen we de directe som $\bigoplus_{i=1}^m W_i$, zoals gedefinieerd in Definitie 2.3.1, ook wel de *inwendige directe som.*

De directe som $\bigoplus_{i=1}^m W_i$ in Definitie 2.3.10 voor willekeurige K-vectorruimten $W_1, \ldots, W_m$ noemen we ook wel de *uitwendige directe som.*

Het volgende lemma toont aan dat een uitwendige directe som ook een inwendige directe som is zoals in Definitie 2.3.1.

Lemma 2.3.13. *Zij $W_1, \ldots, W_m$ vectorruimten over K, en stel $V = \bigoplus_{i=1}^m W_i$ de uitwendige directe som van $W_1, \ldots, W_m$. Dan is V de inwendige directe som van de vectorruimten*

$$W_i' = \{(0, \ldots, a_i, \ldots, 0) \mid a_i \in W_i\},$$

i.e. $V = W_1' \oplus \cdots \oplus W_m'$.

Bewijs. Dit volgt uit het feit dat, voor alle $(a_1, \ldots, a_m) \in \bigoplus_{i=1}^m W_i$,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_m) = (a_1, 0, \ldots, 0) + (0, a_2, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, a_m)$$

de unieke manier is om $(a_1, \ldots, a_m)$ te schrijven als som van elementen uit $W_1', \ldots, W_m'$. □

Opmerking 2.3.14. Voor de geïnteresseerde lezer vermelden we dat Definitie 2.3.10 kan veralgemeend worden naar een oneindig aantal vectorruimten, als volgt. Zij I een verzameling die de rol speelt van *indexverzameling*, d.w.z. dat we de elementen gebruiken om objecten te nummeren. Typische voorbeelden zijn $I = \{1, \ldots, n\}$ of $I = \mathbb{N}$. Zij $\{W_i\}_{i \in I}$ een familie van K-vectorruimten, i.e. voor elke $i \in I$ is een K-vectorruimte W_i gegeven. Een element dat we verkrijgen door uit elke W_i een element a_i te kiezen[5], noteren we als $(a_i)_{i\in I}$. De verzameling

$$\prod_{i\in I} W_i = \big\{(a_i)_{i\in I} \mid a_i \in W_i\big\}$$

met daarop de componentsgewijze optelling en vermenigvuldiging met scalairen,

$$(a_i)_{i\in I} + (b_i)_{i\in I} = (a_i + b_i)_{i\in I}, \quad \lambda(a_i)_{i\in I} = (\lambda a_i)_{i\in I},$$

noemt men het *direct product* van de familie $\{W_i\}_{i\in I}$. Men verifieert dat $\prod_{i\in I} W_i$ een K-vectorruimte is.

De verzameling

$$\bigoplus_{i\in I} W_i = \Big\{(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} W_i \;\Big|\; \text{bijna alle } a_i = 0\Big\},$$

noemt men de *(uitwendige) directe som* van de familie $\{W_i\}_{i\in I}$. (Met *bijna alle* wordt bedoeld: alle op een eindig aantal na.) De verzameling $\bigoplus_{i\in I} W_i$ een deelruimte is van $\prod_{i\in I} W_i$.

Voor eindige families $\{W_i\}_{i\in I}$ geldt $\prod_{i\in I} W_i = \bigoplus_{i\in I} W_i$, en vinden we onze oorspronkelijke Definitie 2.3.10 terug.

2.4 Lineaire afbeeldingen en lineaire operatoren

Voor we de definitie geven van een lineaire afbeelding tussen twee vectorruimten, voeren we eerst nog enkele begrippen in in verband met afbeeldingen tussen twee verzamelingen.

Definitie 2.4.1. Zij A en B twee verzamelingen.

(i) Zij $f\colon A \to B$ een afbeelding, en zij $C \subseteq A$. We noteren

$$f(C) := \{f(c) \mid c \in C\} \subseteq B.$$

(ii) Zij $f\colon A \to B$ een afbeelding, en zij $D \subseteq B$. Het *inverse beeld* van D is de verzameling van alle elementen in A die op een element in D afgebeeld worden. We noteren[6]

$$f^{-1}(D) := \{a \in A \mid f(a) \in D\} \subseteq A.$$

[5] Formeel betekent dit "kiezen" dat we een afbeelding $a\colon I \to \bigcup_{i\in I} W_i$ beschouwen zodat $a(i) \in W_i$ voor alle $i \in I$, maar deze formaliteit is wellicht weinig verhelderend.

[6] Opgelet, f^{-1} is géén afbeelding van B naar A, want een element van B wordt afgebeeld op een *deelverzameling* van A, die niet noodzakelijk uit 1 element bestaat. Zie echter anderzijds Definitie 3.1.12 verderop.

(iii) Zij $f\colon A \to B$ een afbeelding, en zij $C \subseteq A$. Dan is $C \to B\colon c \mapsto f(c)$ ook een afbeelding; we noemen deze afbeelding de *restrictie* van f tot C. We noteren deze afbeelding met

$$f|_C\colon C \to B\colon c \mapsto f(c).$$

(iv) Een afbeelding $f\colon A \to B$ wordt *injectief* genoemd, indien elk element van B hoogstens één maal bereikt wordt door f, of nog, indien voor alle $a, a' \in A$ geldt dat

$$f(a) = f(a') \implies a = a'\,;$$

we noemen f dan een *injectie* van A naar (of in) B. Een injectie van A naar B wordt soms genoteerd als $f\colon A \hookrightarrow B$.

(v) Een afbeelding $f\colon A \to B$ wordt *surjectief* genoemd, indien elk element van B minstens één maal bereikt wordt door f, of nog, indien voor alle $b \in B$ geldt:

er bestaat een $a \in A$ zodat $f(a) = b$.

we noemen f dan een *surjectie* van A naar (of op) B. Een surjectie van A naar B wordt soms genoteerd als $f\colon A \twoheadrightarrow B$.

(vi) Een afbeelding $f\colon A \to B$ wordt *bijectief* genoemd, indien elk element van B juist één maal bereikt wordt door f, of nog, indien voor alle $b \in B$ geldt:

er bestaat juist één $a \in A$ zodat $f(a) = b$.

we noemen f dan een *bijectie* van A naar B (of tussen A en B). Een bijectie van A naar B wordt soms genoteerd als $f\colon A \xrightarrow{\sim} B$.

Opmerking 2.4.2. Beschouw twee afbeeldingen $f\colon A \to B$ en $g\colon A \to B$. Dan geldt:

$$f = g \iff f(a) = g(a) \text{ voor alle } a \in A.$$

Lemma 2.4.3. (i) *Een afbeelding $f\colon A \to B$ is bijectief dan en slechts dan als ze injectief én surjectief is.*

(ii) *Als f een bijectie is van A naar B, dan is $|A| = |B|$, d.w.z. A en B hebben even veel elementen.*

Bewijs. Dit volgt rechtstreeks uit de definities. □

Verder in deze paragraaf bestuderen we een bepaald type afbeeldingen tussen twee vectorruimten.

Definitie 2.4.4. Zij V en W twee vectorruimten over het veld K.

(i) Een afbeelding $f\colon V \to W$ is een *lineaire afbeelding* als
$$f(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2)$$
voor alle $\lambda, \mu \in K$ en alle $v_1, v_2 \in V$. Merk op dat in de bovenstaande identiteit de eerste $+$ de optelling is in de vectorruimte V en dat de tweede $+$ de optelling is in de vectorruimte W; een gelijkaardige opmerking geldt voor de scalaire vermenigvuldiging.
Een lineaire afbeelding wordt ook een *morfisme* van vectorruimten genoemd.

(ii) Een lineaire afbeelding $f\colon V \to V$ van een vectorruimte V naar zichzelf noemen we een *lineaire operator* op V, of ook soms een *endomorfisme* van V.

Opmerking 2.4.5. (i) Een lineaire afbeelding $f\colon V \to W$ zet lineaire combinaties om in lineaire combinaties. Inderdaad,
$$f\Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(v_i)$$
voor alle $v_1, \dots, v_k \in V$ en $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$.

(ii) Zij $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding en zij $U \leq V$ een deelvectorruimte. Dan is de restrictie $f|_U\colon U \to W$ ook een lineaire afbeelding.

(iii) Zij V en W twee K-vectorruimten, en zij $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding. Dan is $f(0_V) = 0_W$. Inderdaad, beschouw de nulelementen $0_V \in V$, $0_W \in W$ en ook $0_K \in K$; uit de lineariteit van f volgt dan dat $f(0_V) = f(0_K 0_V) = 0_K f(0_V) = 0_W$.

Voorbeelden 2.4.6. (1) Zij V en W twee K-vectorruimten. De *nulafbeelding* $0\colon V \to W : v \mapsto 0_W$ is een lineaire afbeelding.

(2) Zij V een K-vectorruimte. De *identieke afbeelding* $\mathbf{1}_V\colon V \to V : v \mapsto v$ is een lineaire operator. We noteren deze afbeelding ook als $\mathbf{1}$.

(3) Zij K een veld en $V = K^n$, $W = K^m$. De linkse vermenigvuldiging met een matrix $A \in M_{m,n}(K)$ is een lineaire afbeelding van V naar W. We noteren deze met
$$L_A\colon K^n \to K^m : v \mapsto Av.$$
We verifiëren dat dit een lineaire afbeelding is; we maken gebruik van Lemma 1.3.6:
$$L_A(\lambda v + \mu w) = A(\lambda v + \mu w) = \lambda Av + \mu Aw = \lambda L_A(v) + \mu L_A(w),$$

voor alle $v, w \in K^n$, $\lambda, \mu \in K$. We zullen verder zien dat elke lineaire afbeelding tussen eindig-dimensionale vectorruimten in zekere zin overeenkomt met de linkse vermenigvuldiging met een matrix (zie Stelling 5.1.8).

(4) Zij $P_n \leq K[x]$, de vectorruimte van de veeltermen van graad $\leq n$. De *afleiding*

$$\frac{d}{dx}\colon P_n \to P_{n-1}\colon f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \frac{df}{dx} = \sum_{i=1}^{n} i \cdot a_i x^{i-1},$$

is een lineaire afbeelding. De afbeelding $\frac{d}{dx}\colon K[x] \to K[x]$ is een lineaire operator op de vectorruimte $K[x]$.

(5) Zij $V = K^n$. De afbeelding

$$S\colon (\lambda_1, \dots \lambda_n)^t \mapsto (0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})^t$$

is een lineaire operator op V. We noemen deze afbeelding de *shiftoperator*.

(6) Stel dat $V = \bigoplus_{i=1}^k W_i$ voor deelruimten $W_i \leq V$. Dan is de afbeelding

$$p_i\colon V \to W_i\colon v = w_1 + \dots + w_k \mapsto w_i \quad \text{met } w_i \in W_i,$$

voor iedere $1 \leq i \leq k$ een lineaire afbeelding. Bemerk dat $v \in V$ op een unieke manier geschreven kan worden als $v = w_1 + \dots + w_k$ met $w_i \in W_i$, aangezien V een directe som is.

Voorbeeld 2.4.6(6) is een voorbeeld van een projectie-operator:

Definitie 2.4.7. Een lineaire operator $p\colon V \to V$ op een K-vectorruimte V noemt men een *projectie-operator* of kortweg een *projectie* als $p(p(v)) = p(v)$ voor alle $v \in V$.

Om een lineaire afbeelding volledig te beschrijven is het voldoende om het beeld van de basiselementen te geven.

Lemma 2.4.8. *Zij V en W twee K-vectorruimten, en zij $\mathcal{B}$ een basis voor V. Zij $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding. Dan is f volledig bepaald door de beelden van de basiselementen $f(b)$ voor alle $b \in \mathcal{B}$.*

Bewijs. Stel dat het beeld $f(b)$ gekend is voor elk element $b \in \mathcal{B}$. Elk element $v \in V$ is op unieke wijze te schrijven is als een lineaire combinatie $\sum_{b \in \mathcal{B}} \lambda_b b$, $\lambda_b \in K$, met bijna alle $\lambda_b = 0$. Aangezien f lineair is, volgt dat

$$f(v) = \sum_{b \in \mathcal{B}} \lambda_b f(b)\,.$$

We hebben het beeld van een willekeurig element van V bepaald, dus f is volledig bepaald. $\square$

De volgende observatie is heel nuttig.

Stelling 2.4.9. *Zij V, W twee K-vectorruimten, zij $\mathcal{B}$ een basis voor V, en zij $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding. Dan geldt:*

(i) *f is injectief als en slechts als $\{f(b) \mid b \in \mathcal{B}\}$ een lineair onafhankelijke verzameling is in W waarbij de elementen $f(b)$ twee aan twee verschillend zijn van elkaar*[7]*;*

(ii) *f is surjectief als en slechts als $\{f(b) \mid b \in \mathcal{B}\}$ een voortbrengende verzameling is in W;*

(iii) *f is bijectief als en slechts als $\{f(b) \mid b \in \mathcal{B}\}$ een basis is in W.*

Bewijs. (i) Onderstel eerst dat f een injectieve afbeelding is. Per definitie van injectiviteit zijn de elementen $f(b)$ dan twee aan twee verschillend van elkaar. Veronderstel nu dat $\sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda_b f(b) = 0$ een lineaire combinatie is van $f(b)$'s (met dus slechts eindig veel λ_b's verschillend van 0) die gelijk is aan 0. Dan is $f\big(\sum \lambda_b b\big) = \sum \lambda_b f(b) = 0$, en dus is, vanwege de injectiviteit van f, $\sum \lambda_b b = 0$. Aangezien $\mathcal{B}$ lineair onafhankelijk is, impliceert dit dat $\lambda_b = 0$ voor alle $b \in \mathcal{B}$. We besluiten dat de $f(b)$'s lineair onafhankelijk zijn.

Omgekeerd, onderstel dat de $f(b)$'s twee aan twee verschillend en lineair onafhankelijk zijn, en beschouw elementen $v_1, v_2 \in V$ met $f(v_1) = f(v_2)$; dan is $f(v_1 - v_2) = 0$. Schrijf $v_1 - v_2 = \sum \lambda_b b$ (waarbij de som slechts eindig veel niet-nul termen heeft). Uit $f\big(\sum \lambda_b b\big) = 0$ volgt $\sum \lambda_b f(b) = 0$. Dit impliceert dat $\lambda_b = 0$ voor alle $b \in \mathcal{B}$, en dus is $v_1 = v_2$. De afbeelding f is dus injectief.

(ii) Onderstel eerst dat f surjectief is, i.e. voor iedere $w \in W$ bestaat er een $v \in V$ waarvoor $w = f(v)$. Aangezien $\mathcal{B}$ een basis van V is, is $v = \sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda_b b$ (met slechts eindig veel λ_b's verschillend van 0). Er volgt dat

$$w = f\Big(\sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda_b b\Big) = \sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda_b f(b).$$

Bijgevolg kunnen we ieder element uit W schrijven als een lineaire combinatie van $\{f(b) \mid b \in \mathcal{B}\}$.

[7] We hadden dit ook kunnen formuleren door te zeggen dat $\{f(b) \mid b \in \mathcal{B}\}$ een lineair onafhankelijk *stel* is in W, maar we hebben het gebruik van stellen (i.e. verzamelingen waarin eenzelfde element meerdere malen kan optreden) bewust vermeden in deze cursus.

Omgekeerd, onderstel dat $\{f(b) \mid b \in \mathcal{B}\}$ een voortbrengende verzameling voor W is. Dan is iedere $w \in W$ te schrijven als $w = \sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda_b f(b)$. Uit de lineariteit van f volgt dat $w = f(\sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda_b b)$. Bijgevolg is f surjectief.

(iii) Dit volgt uit (i) en (ii). □

Voorbeeld 2.4.10. Zij $K = \mathbb{R}$, en beschouw de afleiding $f = d/dx$ op de vectorruimte P_n uit Voorbeeld 2.4.6(4) hierboven. Als basis voor P_n kiezen we bijvoorbeeld $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$, terwijl een basis voor P_{n-1} bijvoorbeeld gegeven wordt door $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$. We bekijken nu de beelden van de basisvectoren, en we vinden

$$f(1) = 0,\ f(x) = 1,\ f(x^2) = 2x,\ \dots,\ f(x^n) = nx^{n-1}.$$

We stellen vast dat de verzameling $\{f(1), \dots, f(x^n)\}$ lineair afhankelijk is, want het bevat het element 0; hieruit volgt reeds dat f niet injectief is. Anderzijds kunnen we elk element van P_{n-1} schrijven als

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = a_0 \cdot 1 + \frac{a_1}{2} \cdot 2x + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n} \cdot nx^{n-1},$$

zodat de verzameling $\{f(1), \dots, f(x^n)\}$ wel voortbrengend is; hieruit volgt dat f surjectief is.

Definitie 2.4.11. (i) Een bijectieve lineaire afbeelding tussen twee K-vectorruimten noemen we een *isomorfisme*.

(ii) Als er tussen twee K-vectorruimten een bijectieve lineaire afbeelding bestaat dan zeggen we dat de vectorruimten *isomorf* zijn. Als twee K-vectorruimten V en W isomorf zijn, noteren we dit met $V \cong W$.

(iii) Een *automorfisme* van V is een isomorfisme van V naar zichzelf.

Voorbeeld 2.4.12. (1) Zij K een veld, en V een willekeurige K-vectorruimte. De identieke afbeelding $\mathbf{1}_V$ op V is een automorfisme van V.

(2) Zij K een veld, en $V = K^n$. Beschouw de afbeelding

$$f\colon V \to V\colon (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)^t \mapsto (a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1)^t.$$

Dan is f een automorfisme van V.

(3) De shiftoperator uit Voorbeeld 2.4.6(5) is geen automorfisme van V.

(4) Zij K een veld, en stel $V = K^n$ en $W = K^m$ voor zekere n, m. Dan is $V \cong W$ als en slechts als $n = m$. (Zie ook Gevolg 2.4.13.)

(5) Zij K een veld. Dan is $K^n \oplus K^m \cong K^{n+m}$ voor alle n, m.

Gevolg 2.4.13. *Twee K-vectorruimten zijn isomorf als en slechts als ze dezelfde dimensie hebben.*

Bewijs. Zij V en W twee K-vectorruimten, en zij $\mathcal{B}$ een basis van V.

Stel eerst dat $f\colon V \to W$ een isomorfisme is. Uit Stelling 2.4.9(iii) volgt dat $\{f(b) \mid b \in \mathcal{B}\}$ een basis van W is. Bijgevolg hebben de basissen van V en W even veel elementen.

Omgekeerd, stel dat V en W dezelfde dimensie hebben. Kies dan basissen $\mathcal{B}$ voor V en $\mathcal{C}$ voor W. Omdat V en W dezelfde dimensie hebben, bestaat er een bijectie $\beta\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. Definieer

$$f\colon V \to W\colon \sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda_b b \to \sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda_b \beta(b);$$

dan is f een lineaire afbeelding, en $\{f(b) \mid b \in \mathcal{B}\} = \mathcal{C}$. Uit Stelling 2.4.9(iii) volgt nu dat f een bijectie is, en bijgevolg een isomorfisme is. $\square$

Gevolg 2.4.14. *Zij K een veld, en zij V een eindig-dimensionale K-vectorruimte. Stel $n = \dim_K(V)$. Dan is V isomorf met de K-vectorruimte K^n.*

Bewijs. Dit is een triviaal gevolg van Gevolg 2.4.13. $\square$

De volgende stelling is zeer belangrijk voor lineaire operatoren op eindig-dimensionale vectorruimten.

Gevolg 2.4.15 (Alternatief-stelling)**.** *Zij V een eindig-dimensionale K-vectorruimte, en zij $f\colon V \to V$ een lineaire operator op V. De volgende eigenschappen zijn equivalent*[8]*:*

(a) *f is injectief;*

(b) *f is surjectief;*

(c) *f is bijectief.*

Bewijs. Zij $\dim V = n$, beschouw een basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ van V, en zij S de verzameling $\{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$. Merk vooreerst op dat indien sommige van de $f(b_i)$ zouden samenvallen (m.a.w. als $|S| < n$), dan f zeker niet injectief is. In dat geval is f uiteraard ook niet bijectief, en aangezien $\dim \operatorname{span}(S) \le |S| < n$ is $\operatorname{span}(S) \ne V$ zodat f ook niet surjectief is.

[8]Het *equivalent* zijn van eigenschappen betekent dat *indien* één van de eigenschappen geldt, *dan* ook de andere gelden. In dit geval zegt de stelling dus dat, *indien* f injectief is, ze dan automatisch ook surjectief (en dus bijectief) is, en omgekeerd, *indien* f surjectief is, ze dan ook injectief (en dus bijectief) is. De stelling zegt dus zeker niet dat elke lineaire operator injectief, surjectief en/of bijectief zou zijn!

We kunnen dus veronderstellen dat $|S| = n$. Uit Stelling 2.2.12 volgt nu dat S lineair onafhankelijk als en slechts als het voortbrengend is als en slechts als het een basis is, en de equivalenties tussen (a), (b) en (c) volgen nu uit Stelling 2.4.9. □

Opmerking 2.4.16. We benadrukken dat de alternatief-stelling gaat over lineaire *operatoren*, en niet over lineaire afbeeldingen in het algemeen. Het is echter wél zo dat de equivalenties blijven gelden als $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding is tussen twee eindig-dimensionale vectorruimten V en W die *dezelfde dimensie* hebben. (Ga zelf na dat het bewijs van Gevolg 2.4.15 ongewijzigd blijft gelden in deze situatie.)

We voeren nu de belangrijke concepten van het beeld en de kern van een lineaire afbeelding in.

Definitie 2.4.17. Zij $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding tussen twee willekeurige K-vectorruimten; dan is de *kern* van f de deelverzameling

$$\ker f := \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

van V. Het *beeld* van f definiëren we als de deelverzameling

$$\operatorname{im} f := f(V) := \{f(v) \mid v \in V\} = \{w \in W \mid \exists v \in V\colon f(v) = w\}$$

van W.

Lemma 2.4.18. *Zij $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding. Dan is $\ker f \leq V$ een deelruimte en $\operatorname{im} f \leq W$ een deelruimte.*

Bewijs. We gebruiken Lemma 2.1.7. Als $\lambda, \mu \in K$ en $v, v' \in \ker f$, dan moeten we aantonen dat $\lambda v + \mu v' \in \ker f$. Dit is zo, aangezien

$$f(\lambda v + \mu v') = \lambda f(v) + \mu f(v') = 0 + 0 = 0\,.$$

Als $w, w' \in \operatorname{im} f$ dan bestaan er elementen $v, v' \in V$ zodat $f(v) = w$ en $f(v') = w'$. Er geldt

$$\lambda w + \mu w' = \lambda f(v) + \mu f(v') = f(\lambda v + \mu v') \in \operatorname{im} f\,,$$

waaruit volgt dat $\operatorname{im} f$ een deelruimte is van W. □

Voorbeeld 2.4.19. (1) Zij $V = K^n$, met standaardbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$, en beschouw de shiftoperator $S\colon V \to V$ uit Voorbeeld 2.4.6(5). Dan is $\operatorname{im} S = \langle e_2, \dots, e_n\rangle$, terwijl $\ker S = \langle e_n\rangle$.

(2) Zij $V = \mathbb{Q}^2$ en $W = \mathbb{Q}^3$, en beschouw de lineaire afbeelding f die gegeven wordt door linkse vermenigvuldiging met de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dan is $\operatorname{im} f = \langle (1, 2, 3)^t \rangle \leq W$, terwijl $\ker f = \langle (2, -1)^t \rangle \leq V$.

Lemma 2.4.20. *Zij $f \colon V \to W$ een lineaire afbeelding. Dan geldt:*

(i) *f is injectief als en slechts als $\ker f = \{0\}$.*

(ii) *f is surjectief als en slechts als $\operatorname{im} f = W$.*

Bewijs. (i) Dat de kern van een injectieve afbeelding gelijk is aan de nulruimte volgt onmiddellijk uit de definities van injectiviteit en kern. Onderstel omgekeerd dat $\ker f = \{0\}$. Uit $f(v) = f(w)$ volgt dat $f(v - w) = 0$, dus $v - w \in \ker f$ maar dan is $v - w = 0$, i.e. $v = w$.

(ii) Dit volgt onmiddellijk uit de definities van surjectiviteit en beeld. □

Lemma 2.4.21. *Zij $f \colon V \to W$ een lineaire afbeelding en zij $U \leq V$ een deelruimte. Beschouw de restrictie $f|_U$ van f tot U. Dan is*

$$\ker f|_U = \ker f \cap U \quad \textit{en} \quad \operatorname{im} f|_U \leq \operatorname{im} f.$$

Bewijs. Oefening. □

Zij f een lineaire afbeelding van een K-vectorruimte V naar een K-vectorruimte W. De volgende stelling geeft een verband tussen de dimensie van een vectorruimte V, de dimensie van het beeld $\operatorname{im} f$ en de dimensie van $\ker f$.

Stelling 2.4.22 (Dimensiestelling voor lineaire afbeeldingen)**.** *Zij V een eindig-dimensionale K-vectorruimte, W een willekeurige K-vectorruimte, en $f \colon V \to W$ een lineaire afbeelding. Dan is*

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f .$$

Bewijs. Kies een basis $\{b_1, \ldots, b_k\}$ voor de deelruimte $\ker f$, dus $k = \dim \ker f$. Uit Gevolg 2.2.8(i) volgt dat we deze basis kunnen uitbreiden tot een basis $\{b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n\}$ voor V. Dan is $\{b_{k+1}, \ldots, b_n\}$ een lineair onafhankelijke verzameling. Stel $U = \operatorname{span}(b_{k+1}, \ldots, b_n)$. Dan is $\ker f \cap U = \{0\}$ en $V = \ker f \oplus U$.

Uit de twee voorgaande lemma's volgt dat de restrictie $f|_U \colon U \to W$ een injectieve afbeelding is. Aangezien U een complement van $\ker f$ is, volgt er dat $\operatorname{im} f|_U = \operatorname{im} f$.

Dit impliceert dat $f|_U$ een isomorfisme is tussen U en $\operatorname{im} f$. Wegens Gevolg 2.4.13 is dan $\dim \operatorname{im} f = \dim U$. Vermits $\dim V = \dim \ker f + \dim U$ volgt het resultaat. $\square$

Opmerking 2.4.23. Merk op dat de Dimensiestelling in feite een versterking is van de Alternatiefstelling (Stelling 2.4.15). Inderdaad, indien $f\colon V \to W$ met $\dim V = \dim W = n$ (wat in het bijzonder geldt als $W = V$), dan is

$$\begin{aligned} f \text{ injectief} &\iff \ker f = 0 \\ &\iff \dim \ker f = 0 \\ &\iff \dim V = \dim \operatorname{im} f \\ &\iff \dim W = \dim \operatorname{im} f \\ &\iff \operatorname{im} f = W \\ &\iff f \text{ surjectief.} \end{aligned}$$

Voorbeeld 2.4.24. (1) Beschouw $f\colon V \to W$ zoals in Voorbeeld 2.4.19(2). Dan is $\dim \ker f = 1$ en $\dim \operatorname{im} f = 1$, zodat $\dim V = 2$ inderdaad gelijk is aan $\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$.

(2) Zij $K = \mathbb{R}$, en beschouw de afleiding $f = d/dx$ van P_n naar P_{n-1} zoals in Voorbeeld 2.4.6(4). Dan is $\dim \ker f = 1$ en $\dim \operatorname{im} f = n$ (want f is surjectief), zodat inderdaad $\dim P_n = n + 1 = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$.

2.5 De rang van een matrix en stelsels van lineaire vergelijkingen

In paragraaf 1.4 hebben we besproken hoe we een stelsel van lineaire vergelijkingen kunnen oplossen. We hebben dit gedaan door de uitgebreide matrix van het stelsel eerst in echelonvorm te brengen en dan de oplossingen af te lezen. In deze paragraaf zullen we de begrippen besproken in het huidige hoofdstuk toepassen om elegantere criteria te ontwikkelen om te bepalen wanneer een stelsel oplosbaar is en wat de ‘grootte’ van de oplossingsverzameling is. Om een stelsel expliciet op te lossen zullen we echter nog steeds gebruik maken van de rijreductie naar de echelonvorm.

Om deze criteria te formuleren zullen we gebruik maken van de rang van een matrix. Alvorens dit begrip te definiëren, bewijzen we de volgende stelling.

Opmerking 2.5.1. Voor elke $A \in M_{m,n}(K)$ vormt de verzameling van kolommen $\{A_1, \ldots, A_n\}$ van A een deelverzameling van de vectorruimte K^m.

Ook is de verzameling van de rijen $\{R_1^t, \ldots, R_m^t\}$ een deelverzameling van de vectorruimte K^n. We kunnen dus de deelruimte van K^m (resp. K^n) voortgebracht door de kolommen (resp. rijen) van een matrix beschouwen.

Merk op dat we de rijen niet altijd expliciet zullen transponeren tot kolommen; het is duidelijk wat we bedoelen met $\operatorname{span}(R_1, \ldots, R_m)$ en dergelijke.

Stelling 2.5.2. *Zij $A \in M_{m,n}(K)$ met kolommen $\{A_1, \ldots, A_n\}$ en rijen $\{R_1, \ldots, R_m\}$. Dan is $\dim \operatorname{span}(A_1, \ldots, A_n) = \dim \operatorname{span}(R_1, \ldots, R_m)$.*

Bewijs. Noteer $s = \dim \operatorname{span}(A_1, \ldots, A_n)$ en $r = \dim \operatorname{span}(R_1, \ldots, R_m)$. Stel dat de verzameling $S = \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_s}\}$ een basis is van $\operatorname{span}(A_1, \ldots, A_n)$.

Definieer een matrix C met als kolommen de kolommen in S, i.e. $C = (A_{i_1} \ldots A_{i_s}) \in M_{m,s}(K)$. Aangezien S een basis is, is iedere kolom A_i een lineaire combinatie van S. We noteren voor alle $1 \leq k \leq n$

$$A_k = \lambda_{1k} A_{i_1} + \cdots + \lambda_{sk} A_{i_s},$$

met $\lambda_{ij} \in K$. Definieer de matrix $E = (\lambda_{ij}) \in M_{s,n}(K)$. Per definitie is $A = CE$.

Noteer met $\{E_1, \ldots, E_s\}$ de rijen van E. Uit $A = CE$ volgt dat iedere rij R_i van A een lineaire combinatie is van $\{E_1, \ldots, E_s\}$; bijgevolg is

$$r = \dim \operatorname{span}(R_1, \ldots, R_m) \leq \dim \operatorname{span}(E_1, \ldots, E_s) \leq s.$$

We hebben dus aangetoond dat $r \leq s$.

Wanneer we de redenering opnieuw doen voor de matrix A^t bekomen we dat $s \leq r$. We concluderen dat $r = s$. □

Door de vorige stelling te gebruiken kunnen we nu de rang van een matrix op twee equivalente manieren definiëren.

Definitie 2.5.3. De *rang* van de matrix $A \in M_{m,n}(K)$ is de dimensie van de deelruimte van K^m (resp. K^n) voortgebracht door de kolommen (resp. rijen) van A. We noteren

$$\operatorname{rk}(A) := \dim \operatorname{span}(A_1, \ldots, A_n) = \dim \operatorname{span}(R_1, \ldots, R_m).$$

Opmerking 2.5.4. De rang $\operatorname{rk}(A)$ is dus gekarakteriseerd als het (unieke) getal r zodat er een verzameling bestaat van r kolommen (resp. rijen) van A die lineair onafhankelijk is, en iedere verzameling van meer dan r kolommen (resp. rijen) van A lineair afhankelijk is.

Voorbeelden 2.5.5. (1) Er geldt dat $\operatorname{rk}(0_{m,n}) = 0$ en dat $\operatorname{rk}(I_n) = n$.

(2) Zij $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K) \setminus \{0\}$ met $a_{ij} = a_{k\ell}$ voor alle $1 \leq i, k \leq m$ en $1 \leq j, \ell \leq n$. Dan is $\mathrm{rk}(A) = 1$.

(3) Zij A een echelonmatrix. Dan is $\mathrm{rk}(A)$ gelijk aan het aantal spilplaatsen. Inderdaad, de verzameling van de spilkolommen is immers een basis voor de ruimte voortgebracht door de kolommen van A.

De volgende eigenschappen van de rang van een matrix zijn eenvoudig maar belangrijk.

Lemma 2.5.6. *Zij $A \in M_{m,n}(K)$ met $\mathrm{rk}(A)$ de rang van A.*

(i) *Beschouw de lineaire afbeelding $L_A \colon K^n \to K^m \colon v \mapsto Av$. Dan is*

$$\mathrm{im}(L_A) = \mathrm{span}\{A_1, \ldots, A_n\};$$

bijgevolg is $\dim(\mathrm{im}\, L_A) = \mathrm{rk}(A)$.

(ii) *Elementaire rijoperaties laten de rang van een matrix invariant.*

(iii) *Zij $A \in M_{m,n}(K)$ en $B \in M_{n,r}(K)$. Dan is $\mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}(A)$ en $\mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}(B)$.*

(iv) *Zij $A \in \mathsf{GL}_n(K)$ en $B \in \mathrm{Mat}_{n,r}(K)$. Dan is $\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(B)$.*

(v) *Zij $A \in \mathsf{GL}_n(K)$ en $B \in \mathrm{Mat}_{r,n}(K)$. Dan is $\mathrm{rk}(BA) = \mathrm{rk}(B)$.*

Bewijs. (i) Zij $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de standaardbasis in K^n. Het beeld van L_A wordt voortgebracht door $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$. Nu is $Ae_i \in K^m$ gelijk aan de i-de kolom van A.

(ii) Na het toepassen van een elementaire rijoperatie blijft de ruimte opgespannen door de rijen van A onveranderd.

(iii) Merk op dat $\mathrm{im}(L_{AB})$ een deelruimte is van $\mathrm{im}\, L_A$, want $(AB)v = A(Bv) \in \mathrm{im}\, L_A$ voor elke $v \in K^r$. In het bijzonder is $\dim(\mathrm{im}(L_{AB})) \leq \dim(\mathrm{im}\, L_A)$, en uit (i) volgt dat $\mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}(A)$.
De andere ongelijkheid volgt nu door transponeren:

$$\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}((AB)^t) = \mathrm{rk}(B^t A^t) \leq \mathrm{rk}(B^t) = \mathrm{rk}(B).$$

(iv) Uit (iii) volgt reeds dat $\mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}(B)$. Omdat A inverteerbaar is, kunnen we echter B nog herschrijven als $B = A^{-1} \cdot AB$, zodat opnieuw uit (iii) volgt dat $\mathrm{rk}(B) = \mathrm{rk}(A^{-1} \cdot AB) \leq \mathrm{rk}(AB)$. Deze twee ongelijkheden samen geven ons $\mathrm{rk}(B) = \mathrm{rk}(AB)$.

(v) Analoog aan (iv). $\square$

Men kan dus de rang van een matrix berekenen door de matrix eerst in echelonvorm te brengen met behulp van elementaire rijoperaties en dan de rang af te lezen (zie Voorbeeld 2.5.5(3)).

Zoals aangekondigd zullen we het concept van rang van een matrix gebruiken om de oplosbaarheid en het aantal oplossingen van een stelsel lineaire vergelijkingen weer te geven. In Lemma 2.5.13 tonen we aan dat de oplossingsverzameling van een niet-strijdig stelsel een zogenaamde affiene deelruimte is. Hiertoe voeren we eerst de nodige definities en hulpresultaten in.

Definitie 2.5.7. Zij V een K-vectorruimte, beschouw een element $v \in V$ en een deelruimte $W \leq V$. Definieer de deelverzameling

$$v + W := \{v + w \mid w \in W\} \subseteq V\,;$$

$v+W$ is dus de verzameling van alle sommen $v+w$ met $w \in W$. We noemen $v + W$ een *affiene deelruimte* of een *lineaire variëteit*.

Opmerking 2.5.8. Als $v \notin W$ dan is de affiene deelruimte $v + W$ geen deelruimte van V! Immers, als $v \notin W$, dan is ook $-v \notin W$ waardoor $0 = v + (-v) \notin v + W$. We kunnen $v + W$ zien als een *verschuiving* van de deelruimte W. (Als $v \in W$, dan is $v + W = W$ wel een deelruimte van V.)

Om het verschil tussen deelruimten en affiene deelruimten te benadrukken, zullen we soms spreken over *vectordeelruimten* versus *affiene deelruimten*.

Voorbeeld 2.5.9. (1) Zij $W \leq V$ een deelruimte. Dan is W ook steeds een affiene deelruimte. We kunnen W immers schrijven als $0 + W$.

(2) Beschouw de vectorruimte $\mathbb{R}^3$. De deelverzameling

$$S = \{(1 + 2r, -1 - s, r + s)^t \mid r, s \in \mathbb{R}\}$$

is een affiene deelruimte van $\mathbb{R}^3$, we kunnen S immers ook schrijven als

$$S = (1, -1, 0)^t + \operatorname{span}(\{(2, 0, 1)^t, (0, -1, 1)^t\}).$$

Deze affiene deelruimte is geen deelruimte van $\mathbb{R}^3$.

Zij $v \in V$ en $w \in W \leq V$, dan zijn de verzamelingen $v+W$ en $(v+w)+W$ gelijk. Het volgend lemma toont aan dat elke affiene deelruimte een unieke deelruimte bepaalt waarvan ze de verschuiving is.

Lemma 2.5.10. *Zij V een vectorruimte, $v_1, v_2 \in V$ en W_1, W_2 deelruimten van V. Dan is $v_1+W_1 = v_2+W_2$ als en slechts als $W_1 = W_2$ en $v_1-v_2 \in W_1$.*

Bewijs. Als $W_1 = W_2$ en $v_1 - v_2 = w_0 \in W_1$, dan is

$$v_1 + W_1 = \{v_1 + w \mid w \in W_1\} \text{ en } v_2 + W_2 = \{v_1 - w_0 + w \mid w \in W_1\}.$$

Als w door alle elementen van W_1 loopt dan loopt $w - w_0$ ook door alle elementen van W_1. De twee verzamelingen zijn dus gelijk.

Omgekeerd, zij $v_1 + W_1 = v_2 + W_2$. Stel $w_0 = v_1 - v_2$, dan volgt dat $w_0 + W_1 = W_2$. Vermits $0 \in W_2$ moet $w_0 \in W_1$. Maar dan is $w_0 + W_1 = W_1$, en bijgevolg $W_1 = W_2$. □

Definitie 2.5.11. Zij $v + W$ een affiene deelruimte van een K-vectorruimte V. Dan definiëren we de *dimensie* van $v + W$ als $\dim(v + W) := \dim W$.

Opmerking 2.5.12. We moeten nagaan dat de definitie van dimensie van een affiene deelruimte *goed gedefinieerd* is. Hiermee bedoelen we dat de neergeschreven formule niet mag afhangen van de keuze van de elementen die we gebruiken om de formule neer te schrijven. Meer bepaald moeten we hier nagaan dat, als $v_1 + W_1 = v_2 + W_2$ twee schrijfwijzen zijn van *dezelfde* affiene deelruimte, dat dan $\dim(W_1) = \dim(W_2)$. Dat dit inderdaad het geval is, volgt onmiddellijk uit Lemma 2.5.10.

We keren nu terug naar de stelsels, en we tonen aan dat de oplossingsverzameling van een niet-strijdig stelsel een affiene deelruimte is.

Lemma 2.5.13. *Beschouw het stelsel $AX = w$ met $A \in M_{m,n}(K)$, $w \in K^m$ en X een kolomvector met n onbekenden. Beschouw de lineaire afbeelding*

$$L_A \colon K^n \to K^m \colon v \mapsto Av.$$

(i) *Het stelsel $AX = w$ is strijdig als en slechts als $w \notin \operatorname{im} L_A$.*

(ii) *Als het stelsel $AX = w$ niet strijdig is, dan is de oplossingsverzameling een affiene deelruimte. Als $v_0 \in K^n$ een oplossing is, dan is de oplossingsverzameling gegeven door $L_A^{-1}(w) = v_0 + \ker L_A$.*

(iii) *Als het stelsel homogeen is, m.a.w. van de vorm $AX = 0$, dan is de oplossingsverzameling gelijk aan de deelruimte $\ker L_A$.*

Bewijs. Merk vooreerst op dat de oplossingsverzameling van $AX = w$ gelijk is aan

$$\{v \in K^n \mid Av = w\} = \{v \in K^n \mid L_A(v) = w\} = L_A^{-1}(w).$$

(i) De oplossingsverzameling $L_A^{-1}(w)$ is ledig als en slechts als $w \notin \operatorname{im} L_A$.

(ii) Stel dat er een oplossing $L_A(v_0) = w$ is. Zij nu $u \in K^n$ willekeurig. Dan is u een oplossing van het stelsel als en slechts als $L_A(u) = w = L_A(v_0)$, als en slechts als $L_A(u - v_0) = 0$, als en slechts als $u - v_0 \in \ker L_A$, als en slechts als $u \in v_0 + \ker L_A$.

(iii) Dit is een bijzonder geval van (ii), rekening houdend met het feit dat een homogeen stelsel nooit strijdig is, en steeds de nuloplossing $v_0 = 0$ heeft. □

Stelling 2.5.14. *Beschouw het stelsel $AX = w$ met $A \in M_{m,n}(K)$, $w \in K^m$ en X een kolomvector met n onbekenden.*

(i) *Het stelsel heeft een oplossing als en slechts als* $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|w)$.

(ii) *Stel dat het stelsel niet strijdig is. Dan is de dimensie van de oplossingsverzameling gelijk aan $n - \mathrm{rk}(A)$.*

Bewijs. (i) Zij $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de kolommen van de matrix A. Er geldt dat

$$\begin{aligned}
\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|w)& \\
&\iff \dim \operatorname{span}(A_1, \ldots, A_n) = \dim \operatorname{span}(A_1, \ldots, A_n, w) \\
&\iff \operatorname{span}(A_1, \ldots, A_n) = \operatorname{span}(A_1, \ldots, A_n, w) \\
&\iff w \in \operatorname{span}(A_1, \ldots, A_n).
\end{aligned}$$

Uit het bovenstaande lemma weten we dat het stelsel een oplossing heeft als en slechts als $w \in \mathrm{im}(L_A)$. De bewering volgt nu wegens Lemma 2.5.6(i).

(ii) Uit het bovenstaande lemma volgt dat de oplossingsverzameling de affiene deelruimte $v_0 + \ker L_A$ is, met v_0 een oplossing. We hebben dat

$$\begin{aligned}
\dim(v_0 + \ker L_A) &= \dim(\ker L_A) \\
&= \dim(K^n) - \dim(\mathrm{im}\, L_A) = n - \mathrm{rk}(A),
\end{aligned}$$

waar we gebruik gemaakt hebben van achtereenvolgens Definitie 2.5.11, Stelling 2.4.22 en Lemma 2.5.6(i). □

Wanneer we een stelsel met even veel onbekenden als vergelijkingen beschouwen, hebben we de volgende sterkere eigenschap.

Gevolg 2.5.15. *Beschouw het stelsel $AX = w$, $A \in M_n(K)$. Als $\mathrm{rk}(A) = n$, dan heeft het stelsel een unieke oplossing.*

Bewijs. Aangezien $\mathrm{rk}(A) = n$ moet ook $\mathrm{rk}(A|w) = n$, en dus volgt uit Stelling 2.5.14 dat het stelsel een oplossing heeft. Aangezien $n - \mathrm{rk}(A) = 0$ volgt dat de oplossingsverzameling dimensie 0 heeft, en dus is er een unieke oplossing. $\square$

We zullen zien in Stelling 5.3.12 verderop dat een matrix $A \in M_n(K)$ met $\mathrm{rk}(A) = n$ steeds inverteerbaar is. De unieke oplossing van het stelsel $AX = w$ met $A \in M_n(K)$ en $\mathrm{rk}(A) = n$, wordt dan gegeven door $x = A^{-1}w$. (Merk op dat inderdaad $A(A^{-1}w) = w$.)

Opmerking 2.5.16. We hebben nu ogenschijnlijk twee verschillende stellingen gezien in verband met de oplossingsverzameling van een lineair stelsel, met name Stelling 1.4.13 en Stelling 2.5.14. We gaan na dat deze twee stellingen in feite op hetzelfde neerkomen.

Zij dus $AX = w$ een stelsel in m vergelijkingen en n onbekenden. Omwille van Lemma 2.5.6(ii) mogen we, om Stelling 2.5.14 toe te passen, aannemen dat de uitgebreide matrix $(A|w)$ in echelonvorm staat.

Volgens Stelling 1.4.13(i) is het stelsel strijdig als en slechts als de laatste kolom van $(A|w)$ een spilkolom is, terwijl volgens Stelling 2.5.14(i) het stelsel strijdig is als en slechts als $w \notin \mathrm{im}\, L_A$. Dit komt inderdaad op hetzelfde neer, want de laatste kolom van $(A|w)$ is een spilkolom als en slechts als $\mathrm{rk}(A|w) = \mathrm{rk}(A) + 1$, wat op zijn beurt equivalent is met het feit dat $w \notin \mathrm{span}(A_i)$ waarbij de A_i de kolommen van A zijn.

Veronderstel nu dat het stelsel $AX = w$ niet strijdig is. Volgens Gevolg 1.4.14 is de dimensie van de oplossingsverzameling (daar uitgedrukt als "het aantal vrij te kiezen onbekenden") gelijk aan het aantal onbekenden min het aantal spilkolommen van de echelonmatrix, terwijl volgens Stelling 2.5.14(ii) deze dimensie gelijk is aan $n - \mathrm{rk}(A)$. Dat dit op hetzelfde neerkomt, volgt nu onmiddellijk uit Voorbeeld 2.5.5(3).

Voorbeeld 2.5.17. Beschouw het stelsel $AX = w$ met 3 vergelijkingen en 6 onbekenden over $\mathbb{R}$, met uitgebreide matrix

$$(A|w) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right).$$

De verzameling S van de indices van de spilkolommen is $\{1, 3, 6\}$. Volgens de formule in Stelling 1.4.13(ii) is de oplossingsverzameling

$$\left\{(5 - 2t_1 - 3t_2 - 4t_3,\ t_1,\ 8 - 6t_2 - 7t_3,\ t_2,\ t_3,\ 9)^t \mid t_1, t_2, t_3 \in K\right\}.$$

Dit is gelijk aan de verzameling

$$\begin{pmatrix}5\\0\\8\\0\\0\\9\end{pmatrix} + \left\{ t_1 \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix}-3\\0\\-6\\1\\0\\0\end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix}-4\\0\\-7\\0\\1\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; t_1, t_2, t_3 \in K \right\}.$$

We zien dat dit inderdaad een affiene deelruimte is, en dat de dimensie van deze affiene deelruimte ook exact het aantal vrij gekozen variabelen is.

Het is eenvoudig na te gaan dat de 3 basisvectoren van de deelruimte behorende bij de affiene ruimte in $\ker L_A$ zitten. Aangezien

$$\dim(\ker L_A) = n - \dim \operatorname{im} L_A) = 6 - 3 = 3,$$

is dit ook de volledige kern.

2.6 Appendix: oneindig-dimensionale vectorruimten

In deze appendix geven we de geïnteresseerde lezer mee hoe Stelling 2.2.7 en Gevolg 2.2.9 kunnen veralgemeend worden voor willekeurige vectorruimten, die niet noodzakelijk eindig-dimensionaal zijn. Hierin zal het zogenaamde Lemma van Zorn een belangrijke rol spelen, en om dit correct te kunnen weergeven hebben we de algemene begrippen van maximale elementen en bovengrenzen nodig, die we nu invoeren.

Definitie 2.6.1. Zij $\mathbf{F}$ een familie verzamelingen en $\mathbf{G}$ een deelfamilie.

(i) Een element $Y \in \mathbf{G}$ is een *maximaal element* in $\mathbf{G}$ als $Z \in \mathbf{G}$ met $Y \subseteq Z$ impliceert dat $Z = Y$, i.e. als geen enkel element van $\mathbf{G}$ de verzameling Y strikt bevat.

(ii) Een element $U \in \mathbf{F}$ is een *bovengrens* (in $\mathbf{F}$) voor $\mathbf{G}$ als voor alle $Z \in \mathbf{G}$ geldt dat $Z \subseteq U$.

Voorbeelden 2.6.2. (1) Zij X een verzameling en $\mathbf{F} = \mathbf{P}(X)$ de *machtsverzameling* van X, i.e. de verzameling van alle deelverzamelingen van X. Zij $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$; dan is X een bovengrens in $\mathbf{F}$ voor $\mathbf{G}$.

(2) $\mathbf{G} = \{U \subsetneq \mathbb{N} \mid |U| < \infty\}$. Dan heeft $\mathbf{G}$ geen maximale elementen, en $\mathbb{N}$ is de enige bovengrens van $\mathbf{G}$ in $\mathbf{P}(\mathbb{N})$.

(3) Zij $n \in \mathbb{N}$ en $\mathbf{G}$ een familie verzamelingen met $|U| < n$ voor alle $U \in \mathbf{G}$. Zij $m = \max\{|U| \mid U \in \mathbf{G}\}$; dan is $m < n$. De elementen $U \in \mathbf{G}$ met $|U| = m$ zijn maximale elementen in $\mathbf{G}$.

(4) $\mathbf{G} = \{G \subseteq \mathbb{Z} \mid G$ een abelse deelgroep van $(\mathbb{Z}, +), 1 \notin G\}$. De elementen $p\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n$ een veelvoud van $p\}$ met p een priemgetal zijn maximale elementen in $\mathbf{G}$. In de verzameling van alle deelgroepen van $\mathbb{Z}, +$ is $\mathbb{Z}$ een bovengrens voor $\mathbf{G}$.

(5) Zij X een verzameling en $\mathbf{G}$ een deelfamilie van $\mathbf{P}(X)$ die totaal geordend is voor de inclusie relatie; een dergelijke familie noemt men een *keten*. Dan is $\cup_{Y \in \mathbf{G}} Y$ een bovengrens voor $\mathbf{G}$ in $\mathbf{P}(X)$.

(6) Zij V een K-vectorruimte, T een lineair onafhankelijke verzameling en S een voortbrengende verzameling. Zij

$$\mathbf{G} = \{B \subseteq V \mid T \subseteq B \subseteq S, B \text{ een lineair onafhankelijke verzameling}\}.$$

De maximale elementen in $\mathbf{G}$ zijn basissen in V.
Zij $\mathcal{B}$ een maximaal element in $\mathbf{G}$, en zij $v \in S$; dan is de verzameling $\mathcal{B} \cup \{v\}$ lineair afhankelijk. Er is een lineaire combinatie

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$$

met $v_1, \ldots, v_m \in \mathcal{B}$ en $\lambda \neq 0$ (vermits $v_1, \ldots, v_m$ een lineair onafhankelijke verzameling is). Uit Lemma 2.1.21(i) volgt dan dat $v \in \operatorname{span}(\mathcal{B})$ en dus $S \subseteq \operatorname{span}(\mathcal{B}) \subseteq \operatorname{span}(S)$. Dit impliceert dat $\operatorname{span}(\mathcal{B}) = \operatorname{span}(S) = V$. Dus $\mathcal{B}$ is lineair onafhankelijk en voortbrengend, i.e. $\mathcal{B}$ is een basis voor V.

(7) Zij V een K-vectorruimte dan is een basis in V een maximale lineair onafhankelijke deelverzameling van V (i.e. een basis is een maximaal element in $\mathbf{G} = \{T \subseteq V \mid T$ lineair onafhankelijk$\}$). Uit het voorgaande voorbeeld volgt dat de basissen in V juist de maximaal lineair onafhankelijke deelverzamelingen zijn van V.

Het laatste voorbeeld geeft een karakterisatie van de basissen in een vectorruimte. Het is echter niet evident dat basissen bestaan; om te bewijzen dat er in een vectorruimte basissen bestaan moet men bewijzen dat er in de verzameling van lineair onafhankelijke delen in V maximale elementen bestaan. Voor eindig-dimensionale vectorruimten hebben we dit reeds bewezen, maar in het algemeen geval moet men hiervoor beroep doen op een belangrijk axioma van de verzamelingenleer, namelijk het *keuze-axioma*.

Axioma 2.6.3 (Keuze-axioma). *Voor elke niet-lege familie van niet-lege verzamelingen bestaat er een functie die met elk element A van die familie een element in A associeert. (Die functie "kiest" dus een element uit elke A.)*

Gebruik makend van het keuze-axioma kan men het volgende lemma, dat bekend staat als het lemma van Zorn[9], bewijzen. Dit lemma zegt iets over het bestaan van maximale elementen in families van verzamelingen. We geven dit lemma hier zonder een bewijs. (Men kan aantonen dat het lemma equivalent is met het keuze-axioma, i.e. dat omgekeerd het keuze-axioma uit het lemma van Zorn volgt.)

Lemma 2.6.4 (Lemma van Zorn)**.** *Zij X een familie van verzamelingen. Als iedere keten (i.e. iedere voor de inclusie totaal geordende deelfamilie van X) een bovengrens heeft in X, dan bevat X een maximaal element.*

Dit lost het probleem over het bestaan van maximaal lineair onafhankelijke stellen in een vectorruimte V op.

Stelling 2.6.5. (i) *Zij V een K-vectorruimte. Zij T een lineair onafhankelijk deelverzameling van V en S een voortbrengende verzameling die T bevat. Dan is er een basis $\mathcal{B}$ voor V zodat $T \subseteq \mathcal{B} \subseteq S$.*

(ii) *Elke lineair onafhankelijke verzameling T in V kan uitgebreid worden tot een basis voor V. Elke voortbrengde verzameling S in V bevat een basis voor V. Er bestaat een basis in V.*

Bewijs. (i) Het volstaat om op te merken dat

$$\mathbf{G} = \{B \subseteq V \mid T \subseteq B \subseteq S, B \text{ lineair onafhankelijk}\}$$

een maximaal element heeft.
Voor elke keten $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{G}$ is er een bovengrens in $\mathbf{G}$, namelijk $R = \cup_{B \in \mathbf{X}} B$. Dit zien we als volgt. Het is duidelijk dat $T \subseteq R \subseteq S$. Een lineaire relatie van elementen uit R is van de vorm $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0$ met $b_i \in R$. Vermits $\mathbf{X}$ totaal geordend is voor de inclusierelatie is er een $B \in \mathbf{X}$ zodat $b_1, \ldots, b_n \in B$, maar B is lineair onafhankelijk, dus $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Bijgevolg is R een element van $\mathbf{G}$, en het is evident dat R een bovengrens is voor de elementen van $\mathbf{X}$. Uit het lemma van Zorn volgt nu dat $\mathbf{G}$ een maximaal element $\mathcal{B}$ heeft. We weten reeds (zie Voorbeeld 2.6.2(6)) dat een dergelijk maximaal element $\mathcal{B}$ een basis is voor V.

(ii) We mogen aannemen dat $V \neq \{0\}$. Neem $0 \neq v \in V$. De uitspraken volgen uit punt (1) met in het eerste geval $S = V$, in het tweede geval $T = \{v\}$ en voor de derde uitspraak $T = \{v\}$ en $S = V$. □

[9]Genoemd naar de Amerikaanse (in Duitsland geboren) wiskundige Max August Zorn (1906–1993). In feite werd het lemma van Zorn eerst ontdekt door K. Kuratowski in 1922, en pas in 1935 herontdekt door M. Zorn. Zorn is ook bekend omwille van zijn studie van zogenaamde *alternatieve algebra's*.

Voorbeeld 2.6.6. We kunnen het veld $\mathbb{R}$ beschouwen als een vectorruimte over $\mathbb{Q}$. Uit Stelling 2.6.5 volgt dat er een $\mathbb{Q}$-basis bestaat voor $\mathbb{R}$; een dergelijke basis wordt een *Hamel*[10] *basis* genoemd. Nochtans is er geen expliciete constructie mogelijk van een dergelijke basis; het bestaan ervan hangt af van het keuze-axioma (of equivalent, van het lemma van Zorn).

Ook de eigenschap dat alle basissen in een vectorruimte even veel elementen hebben geldt in het algemeen. Wanneer de vectorruimte geen eindige basis heeft, spreken we van een *oneindig-dimensionale vectorruimte*. In dit geval hebben twee basissen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ voor een ruimte V dezelfde kardinaliteit, dit betekent dat er een bijectie bestaat tussen $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$ en we noteren $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$.

Het bewijs volgt op dezelfde manier al in het eindig-dimensionaal geval uit een veralgemening van Lemma 2.2.6. Het gebruikt verder de volgende eigenschappen van kardinaliteiten:

(1) Stelling van Cantor–Bernstein–Schröder[11]: Zij X, Y verzamelingen. Als er een injectie is van X naar Y, we noteren $|X| \leq |Y|$, en er is een injectie van Y naar X, dus $|Y| \leq |X|$, dan is er een bijectie tussen X en Y, i.e. $|X| = |Y|$.

(2) Voor elke oneindige verzameling X geldt $|X \times \mathbb{N}| = |X| \cdot |\mathbb{N}| = |X|$.

We geven nog aan hoe de veralgemening van Lemma 2.2.6 dan kan bewezen worden.

Lemma 2.6.7. *Zij V een K-vectorruimte, T een lineair onafhankelijk deelverzameling van V en S een voortbrengend deelverzameling van V. Dan is $|T| \leq |S|$.*

Bewijs. We kunnen een basis $\mathcal{B}$ kiezen zodat $T \subset \mathcal{B}$ (Stelling 2.6.5(ii)). Het is dan voldoende om aan te tonen dat $|\mathcal{B}| \leq |S|$. Elke $v \in S$ is te schrijven als een lineaire combinatie van de elementen in $\mathcal{B}$; dit wil zeggen dat er een *eindige* deelverzameling $B_v \subset \mathcal{B}$ bestaat zodat $v \in \operatorname{span}(B_v)$. Beschouw nu $B := \cup_{v \in S} B_v$; dan is $v \in \operatorname{span}(B)$ voor elke $v \in S$, en bijgevolg $V = \operatorname{span}(S) \subseteq \operatorname{span}(B)$. Dus B vormt een voortbrengende deelverzameling van de basis $\mathcal{B}$, en dit kan enkel als $B = \mathcal{B}$. Bijgevolg is

$$|\mathcal{B}| = |B| = \Big| \bigcup_{v \in S} B_v \Big| \leq \sum_{v \in S} |B_v| \leq |S| \cdot |\mathbb{N}| = |S|. \qquad \square$$

[10] Genoemd naar de Duitse wiskundige Georg Karl Wilhelm Hamel (1877–1954).

[11] Genoemd naar de drie Duitse wiskundigen Georg Cantor (1845–1918), Felix Bernstein (1878–1956) en Ernst Schröder (1841–1902).

Hoofdstuk 3

Ruimten van homomorfismen en duale ruimten

3.1 Ruimten van homomorfismen

Definitie 3.1.1. Zij K een veld, en V, W twee K-vectorruimten.

(i) De verzameling van alle lineaire afbeeldingen tussen V en W noteren we

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) := \{f : V \to W \mid f \text{ een lineaire afbeelding}\},$$

en noemen we de *ruimte van homomorfismen van V naar W*, of ook wel de *ruimte van lineaire afbeeldingen van V naar W*, of kortweg de *homruimte van V naar W*. We gebruiken ook de notatie $\mathrm{Hom}(V, W)$ als het veld vastligt of als het duidelijk is over welk veld de vectorruimten beschouwd worden.

(ii) Zij $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ en $\lambda \in K$; dan definiëren we de afbeeldingen $f + g$ en λf als

$$\begin{cases} (f+g)(v) := f(v) + g(v) & \text{voor alle } v \in V, \text{ en} \\ (\lambda f)(v) := \lambda f(v) & \text{voor alle } v \in V. \end{cases}$$

De optelling en scalaire vermenigvuldiging in het rechterlid van de definitie zijn de optelling en de scalaire vermenigvuldiging in W.

Opmerking 3.1.2. Beschouw twee elementen $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Dan geldt:

$$f = g \iff f(v) = g(v) \text{ voor alle } v \in V.$$

(Zie Opmerking 2.4.2.) Bovendien geldt, als $\mathcal{B}$ een willekeurige basis is voor V:

$$f = g \iff f(v) = g(v) \text{ voor alle } v \in \mathcal{B}.$$

(Ga dit zelf na.) We zullen dit in het vervolg vaak gebruiken.

Lemma 3.1.3. *Zij K een veld, en V, W twee K-vectorruimten. Zij $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ en $\lambda \in K$. Dan is $f + g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ en $\lambda f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Met deze bewerkingen wordt de verzameling $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ een K-vectorruimte. Het nulelement van deze vectorruimte is de nulafbeelding $0_{V,W}$.*

Bewijs. Aangezien W een vectorruimte is, beelden de afbeeldingen $f+g$ en λf elementen uit V af op elementen uit W. We gaan na dat deze afbeeldingen lineair zijn. Zij dus $v_1, v_2 \in V$ en $\mu_1, \mu_2 \in K$; dan is

$$\begin{aligned}(f+g)(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) &= f(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) + g(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2)\\ &= \mu_1 f(v_1) + \mu_2 f(v_2) + \mu_1 g(v_1) + \mu_2 g(v_2)\\ &= \mu_1(f(v_1) + g(v_1)) + \mu_2(f(v_2) + g(v_2))\\ &= \mu_1(f+g)(v_1) + \mu_2(f+g)(v_2),\end{aligned}$$

en dus is $f+g \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$;

$$\begin{aligned}(\lambda f)(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) &= \lambda f(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \lambda(\mu_1 f(v_1) + \mu_2 f(v_2))\\ &= \mu_1 \lambda f(v_1) + \mu_2 \lambda f(v_2) = \mu_1(\lambda f)(v_1) + \mu_2(\lambda f)(v_2),\end{aligned}$$

en dus is $\lambda f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$.

Om aan te tonen dat $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ een K-vectorruimte is, moeten we (V1)–(V7) nagaan. We werken uit dat de eigenschappen (V1), (V2) en (V3) gelden; de andere eigenschappen laten we als een oefening (analoog aan de verificatie van (V1)). We maken hierbij gebruik van Opmerking 3.1.2.

(V1) Beschouw $f, g, h \in \mathrm{Hom}(V,W)$, we moeten nagaan dat $(f+g)+h = f+(g+h)$. Kies $v \in V$ willekeurig, we gaan na dat $((f+g)+h)(v) = (f+(g+h))(v)$. Per definitie is

$$((f+g)+h)(v) = (f+g)(v) + h(v) = (f(v)+g(v)) + h(v),$$

en aangezien de optelling in W associatief is, is dit gelijk aan

$$f(v) + (g(v) + h(v)) = f(v) + (g+h)(v) = (f+(g+h))(v).$$

(V2) Voor alle $v \in V$ is $(f+0)(v) = f(v) + 0(v) = f(v) + 0_W = f(v)$, dus is $f + 0 = f$ voor alle $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$. Analoog is ook $0 + f = f$.

(V3) Zij $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$; definieer de afbeelding $g\colon V \to W : v \mapsto -f(v)$. Het is duidelijk na $g \in \mathrm{Hom}(V,W)$. Er geldt dat

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v) = f(v) + (-f(v)) = 0_W = 0(v),$$

voor alle $v \in V$. Bijgevolg is $f + g = 0$; we noteren de afbeelding g ook vaak als $-f$. □

Kort samengevat kunnen we zeggen dat $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ een K-vectorruimte is, omdat W een K-vectorruimte is. In de volgende stelling gaan we na wat de dimensie van de vectorruimte $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ is. We voeren eerst volgende notatie in.

Notatie 3.1.4 (Kronecker[1] delta)**.** Voor alle $i, j \in \mathbb{N}$ definiëren we

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{als } i = j\,; \\ 0 & \text{als } i \neq j\,. \end{cases}$$

Stelling 3.1.5. *Zij K een veld, en V, W twee eindig-dimensionale K-vectorruimten. Dan is* $\dim \operatorname{Hom}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$.

Bewijs. Zij $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ een basis voor V en $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ een basis voor W. Voor elke $1 \leq i \leq n$ en $1 \leq j \leq m$ stellen we $f_{ij} \in \operatorname{Hom}(V, W)$ gelijk aan de unieke lineaire afbeelding (zie Lemma 2.4.8) bepaald door

$$\begin{cases} f_{ij}(v_i) = w_j, \\ f_{ij}(v_k) = 0 \quad \text{voor alle } k \neq i. \end{cases} \tag{3.1}$$

Met andere woorden, er geldt dat $f_{ij}(v_k) = \delta_{ik} w_j$ voor alle i, j, k. We zullen aantonen dat de verzameling

$$S = \{f_{ij} \mid i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m\} \subseteq \operatorname{Hom}(V, W)$$

een basis van $\operatorname{Hom}(V, W)$ is.

- We tonen aan dat S lineair onafhankelijk is. Stel dat $\sum_{i,j} \lambda_{ij} f_{ij} = 0$ voor $\lambda_{ij} \in K$. Dan volgt, voor alle $k = 1, \ldots, n$,

  $$\sum_{i,j} \lambda_{ij} f_{ij}(v_k) = \sum_{i,j} \lambda_{ij} \delta_{ik} w_j = \sum_{j} \lambda_{kj} w_j = 0\,;$$

  omdat $\mathcal{C}$ een basis is van W, volgt hieruit dat $\lambda_{kj} = 0$ voor alle k, j.
- We tonen aan dat S voortbrengend is. Zij $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ een willekeurige lineaire afbeelding van V naar W. Voor elke $k = 1, \ldots, n$ schrijven we $f(v_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} w_j$, voor zekere $a_{kj} \in K$. Er volgt dat

  $$f(v_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} w_j = \sum_{i,j} a_{ij} \delta_{ik} w_j = \sum_{i,j} a_{ij} f_{ij}(v_k)$$

  voor elke k. Uit Opmerking 3.1.2 volgt nu dat $f = \sum_{i,j} a_{ij} f_{ij}$, dus is S voortbrengend.

De verzameling S is dus een basis van $\operatorname{Hom}(V, W)$, en de stelling volgt aangezien $|S| = nm$. $\square$

[1] Genoemd naar de Duitse wiskundige Leopold Kronecker (1823–1891).

Definitie 3.1.6. Zij A, B, C drie verzamelingen, en zij g een afbeelding van A naar B en f een afbeelding van B naar C. We definiëren de afbeelding

$$f \circ g\colon A \to C\colon a \mapsto f(g(a)).$$

We noemen deze afbeelding de *samenstelling* van f en g, we spreken $f \circ g$ uit als f *na* g.

Lemma 3.1.7. *Zij V, W, U drie K-vectorruimten, zij $g \in \operatorname{Hom}(V, W)$ en $f \in \operatorname{Hom}(W, U)$. Dan is $f \circ g \in \operatorname{Hom}(V, U)$.*

Bewijs. Oefening. $\square$

Zij V een K-vectorruimte; dan is de verzameling $\operatorname{Hom}_K(V, V)$ van lineaire operatoren op V een K-vectorruimte. Deze ruimte heeft echter nog meer structuur.

Stelling 3.1.8. *Zij K een veld, en zij V een K-vectorruimte. Dan is de verzameling $\operatorname{Hom}_K(V, V)$ een ring, waarbij de vermenigvuldiging gegeven is door samenstelling van operatoren:*

$$(fg)(v) := (f \circ g)(v) = f(g(v)) \text{ voor alle } v \in V,$$

voor alle $f, g \in \operatorname{Hom}_K(V, V)$.

Bewijs. We weten reeds dat $\operatorname{Hom}_K(V, V)$ een abelse groep is voor de optelling, dus (R1)–(R4) zij reeds voldaan.

(R5) We gaan na dat $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ voor alle $f, g, h \in \operatorname{Hom}_K(V, V)$. Zij $v \in V$ willekeurig, dan is $(f \circ (g \circ h))(v) = f((g \circ h)(v)) = f(g(h(v)))$ en $((f \circ g) \circ h)(v) = (f \circ g)(h(v)) = f(g(h(v)))$.

(R6) Het neutraal element voor de samenstelling is de identieke afbeelding $\mathbf{1}_V$ op V. Immers, $(f \circ \mathbf{1}_V)(v) = f(\mathbf{1}_V(v)) = f(v)$ en $(\mathbf{1}_V \circ f)(v) = \mathbf{1}_V(f(v)) = f(v)$ voor alle $v \in V$.

(R7) We moeten nagaan dat voor alle $f, g, h \in \operatorname{Hom}_K(V, V)$ geldt dat

$$f(g + h) = fg + fh \quad \text{en} \quad (g + h)f = gf + hf\,.$$

We rekenen de linksdistributiviteit na. Voor alle $v \in V$ hebben we

$$\begin{aligned} \big(f(g + h)\big)(v) &= f \circ (g + h)(v) = f((g + h)(v)) \\ &= f(g(v) + h(v)) = f(g(v)) + f(h(v)) = (fg)(v) + (fh)(v)\,; \end{aligned}$$

de voorlaatste gelijkheid volgt uit de lineariteit van f. De verificatie van de rechtsdistributiviteit is volledig analoog. $\square$

Definitie 3.1.9. De ruimte $\mathrm{Hom}_K(V,V)$ met als vermenigvuldiging de samenstelling vormt dus een ring; men noemt dit de *endomorfismenring* van V en noteert deze met $\mathrm{End}_K(V)$ of $\mathrm{End}(V)$.

Opmerking 3.1.10. (i) De ring $\mathrm{End}_K(V)$ is niet commutatief als $\dim V > 1$. Als voorbeeld beschouwen we de vectorruimte K^2 en de lineaire operatoren

$$f\colon V \to V\colon (a,b)^t \mapsto (b,0)^t \text{ en}$$
$$g\colon V \to V\colon (a,b)^t \mapsto (0,a)^t.$$

We hebben $(f \circ g)(a,b)^t = (a,0)^t$ en $(g \circ f)(a,b)^t = (0,b)^t$. Bijgevolg is $f \circ g \neq g \circ f$.

(ii) De ring $\mathrm{End}_K(V)$ heeft *nuldelers* als $\dim V > 1$, d.w.z. er bestaan elementen $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$ met $f \neq 0$ en $g \neq 0$ en toch $fg = 0$. Als voorbeeld beschouwen we de vectorruimte K^2 en de lineaire operatoren

$$f\colon V \to V\colon (a,b)^t \mapsto (a,0)^t \text{ en}$$
$$g\colon V \to V\colon (a,b)^t \mapsto (0,b)^t.$$

Dan is $(f \circ g)(a,b)^t = (0,0)^t$. Bijgevolg is $f \circ g = 0$.

Opmerking 3.1.11. We hebben enerzijds gezien dat $\mathrm{End}(V)$ een K-vectorruimte is, en anderzijds dat $\mathrm{End}(V)$ een ring is. Deze twee structuren zijn compatibel met elkaar: voor alle $\lambda \in K$ en alle $f, g \in \mathrm{End}(V)$ is $\lambda(fg) = (\lambda f)g$. Inderdaad, voor alle $v \in V$ geldt

$$\big(\lambda(fg)\big)(v) = \lambda\big((fg)(v)\big) = \lambda f(g(v)) = (\lambda f)(g(v)) = \big((\lambda f)g\big)(v)\,.$$

De verzameling $\mathrm{End}(V)$ met deze bewerkingen (optelling, vermenigvuldiging, vermenigvuldiging met scalairen) is een voorbeeld van wat men een *K-algebra* noemt.

We willen nu wat nader ingaan op inverteerbare lineaire operatoren.

Definitie 3.1.12. Zij A en B twee verzamelingen, en $f\colon A \to B$ een afbeelding. Als f bijectief is, dan bestaat voor iedere $b \in B$ de verzameling $f^{-1}(\{b\}) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$ uit precies één element. We definiëren dan de afbeelding

$$f^{-1}\colon B \to A\colon b \mapsto \text{het unieke element in } f^{-1}(\{b\}).$$

We noemen f^{-1} de *inverse afbeelding* van f. Om die reden noemen we een bijectieve afbeelding ook wel een *inverteerbare* afbeelding.

De inverteerbare lineaire afbeeldingen zijn precies die afbeeldingen die inverteerbaar zijn met betrekking tot de bewerking “samenstelling”:

Lemma 3.1.13. *Zij $f\colon A \to B$ een afbeelding. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

(a) *Er bestaat een afbeelding $g\colon B \to A$ zodat $f \circ g = \mathbf{1}_B$ en $g \circ f = \mathbf{1}_A$.*

(b) *f is bijectief.*

Indien deze uitspraken voldaan zijn, dan is $g = f^{-1}$.

Bewijs. Veronderstel eerst dat (a) geldt. Dan is de afbeelding f injectief, want uit $f(a) = f(a')$ volgt dat $g(f(a)) = g(f(a'))$, en bijgevolg is $\mathbf{1}_A(a) = \mathbf{1}_A(a')$ en dus is $a = a'$. De afbeelding f is ook surjectief, want stel $b \in B$ willekeurig, dan is $b = \mathbf{1}_B(b) = f(g(b))$, en dus is b het beeld onder f van het element $g(b) \in A$. Dus f is bijectief, i.e. (b) geldt.

Veronderstel nu omgekeerd dat (b) geldt, en beschouw de inverse afbeelding $f^{-1}\colon B \to A$, die elk element $b \in B$ afbeeldt op het unieke element in A met $f(a) = b$. Dan is uiteraard $f(f^{-1}(b)) = b$ voor alle $b \in B$ en $f^{-1}(f(a)) = a$ voor alle $a \in A$, en dus geldt (a) met $g = f^{-1}$.

Ten slotte merken we op dat als f bijectief is en (a) geldt voor een zekere $g\colon B \to A$, dan is $f \circ g = \mathbf{1}_B = f \circ f^{-1}$, en uit de injectiviteit van f volgt dan $g = f^{-1}$. □

De inverteerbare *lineaire* afbeeldingen zijn dus precies de isomorfismen, die we hebben ingevoerd in Definitie 2.4.11, en de inverteerbare lineaire operatoren zijn de automorfismen.

Definitie 3.1.14. Zij V een K-vectorruimte. De verzameling van alle automorfismen van V noemt men de *algemene lineaire groep*, en noteert men als $\mathsf{GL}_K(V)$ of $\mathsf{GL}(V)$.

Lemma 3.1.15. (i) *Zij $f \in \mathrm{End}(V)$, en veronderstel dat f bijectief is. Dan is $f^{-1} \in \mathrm{End}(V)$ en f^{-1} is eveneens bijectief. Met andere woorden, als $f \in \mathsf{GL}(V)$, dan is $f^{-1} \in \mathsf{GL}(V)$.*

(ii) *De deelverzameling $\mathsf{GL}(V)$ van $\mathrm{End}(V)$ vormt een groep voor de samenstelling op $\mathrm{End}(V)$.*

Bewijs. (i) Het feit dat f^{-1} opnieuw een bijectieve afbeelding is, volgt direct uit de definitie. We tonen aan dat f^{-1} lineair is. Stel dus $v, w \in V$ en $\lambda, \mu \in K$ willekeurig; we willen aantonen dat

$$f^{-1}(\lambda v + \mu w) = \lambda f^{-1}(v) + \mu f^{-1}(w)\,.$$

Stel $f^{-1}(v) = x$ en $f^{-1}(w) = y$, m.a.w. $f(x) = v$ en $f(y) = w$. Dan is

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

omdat f lineair is; bijgevolg is

$$\begin{aligned}\lambda f^{-1}(v) + \mu f^{-1}(w) = \lambda x + \mu y &= f^{-1}\big(\lambda f(x) + \mu f(y)\big) \\ &= f^{-1}(\lambda v + \mu w)\,.\end{aligned}$$

(ii) Merk vooreerst op dat de samenstelling van twee automorfismen opnieuw een automorfisme is. Uit Stelling 3.1.8 volgt dat de samenstelling associatief is, dus (G1) is voldaan. Aangezien $\mathbf{1}_V$ een automorfisme is, is ook (G2) voldaan. In (i) hebben we aangetoond dat het inverse van een automorfisme opnieuw een automorfisme is, en aangezien $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathbf{1}_V$ is (G3) ook voldaan. □

Opmerking 3.1.16. Beschouw een eindig-dimensionale vectorruimte V met $\dim V = n$. In Stelling 5.1.8(iv) zullen we aantonen dat $\mathsf{GL}_K(V)$ en $\mathsf{GL}_n(K)$ (de groep van de inverteerbare $n \times n$-matrices over K) isomorfe groepen zijn. Dit verklaart waarom de notatie voor deze objecten gelijkaardig is.

3.2 De minimaalveelterm van een lineaire operator

Het zal in het vervolg belangrijk blijken om uit een gegeven lineaire operator nieuwe lineaire operatoren te construeren door middel van veeltermen.

Definitie 3.2.1. Zij $f \in \operatorname{End}(V)$ een lineaire operator.

(i) Voor elk natuurlijk getal ℓ stellen we

$$f^\ell := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{\ell \text{ keer}},$$

waarbij we $f^0 := \mathbf{1}_V$ definiëren.

(ii) Elke uitdrukking $\sum_{i=0}^d a_i f^i$ met $a_i \in K$ definieert een lineaire operator op V, gegeven door

$$\left(\sum_{i=0}^d a_i f^i\right)(v) = \sum_{i=0}^d a_i f^i(v)$$

voor alle $v \in V$.

(iii) Zij nu $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i \in K[x]$ een veelterm. Dan definiëren we $\varphi(f) := \sum_{i=0}^{d} a_i f^i \in \operatorname{End}(V)$.

(iv) We definiëren de deelverzameling $K[f]$ van $\operatorname{End}(V)$ als

$$K[f] := \Big\{ \sum_{i=0}^{d} a_i f^i \mid a_i \in K \Big\} = \big\{ \varphi(f) \mid \varphi(x) \in K[x] \big\}.$$

Stelling 3.2.2. *Zij V een eindig-dimensionale K-vectorruimte, en beschouw $f \in \operatorname{End}(V)$.*

(i) *De deelverzameling $K[f]$ is een commutatieve deelalgebra (d.w.z. een K-deelruimte en een commutatieve deelring) van* $\operatorname{End}(V)$.

(ii) $\dim_K K[f] \leq n^2$.

(iii) *Er bestaat een $d \in \mathbb{N}$ zodat de verzameling $\{1, f, f^2, \dots, f^{d-1}\}$ een basis vormt voor $K[f]$, en $\dim K[f] = d$.*

(iv) *Indien $f^d = -\sum_{i=0}^{d-1} a_i f^i$, dan is*

$$\mu(x) := x^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i x^i \in K[x]$$

de monische veelterm van de kleinste graad zodat $\mu(f)$ de nuloperator is.

(v) *Zij $\varphi(x) \in K[x]$ een veelterm waarvoor geldt dat $\varphi(f) = 0$. Dan is $\mu(x)$ een deler van $\varphi(x)$.*

Bewijs. (i) Het is duidelijk dat $K[f]$ een deelruimte vormt van $\operatorname{End}(V)$. We bewijzen nu dat de samenstelling van twee operatoren $g, h \in K[f]$ opnieuw tot $K[f]$ behoort. Schrijf dus $g = \varphi(f)$ en $h = \psi(f)$ voor zekere $\varphi(x), \psi(x) \in K[x]$; dan is

$$g \circ h = \varphi(f) \circ \psi(f) = (\varphi\psi)(f)\,,$$

waarbij $(\varphi\psi)(x)$ het product voorstelt van de veeltermen $\varphi(x)$ en $\psi(x)$. Dit toont aan dat $g \circ h \in K[f]$, en dus is $K[f]$ een deelring. Het is ook duidelijk dat $g \circ h = h \circ g$ omdat $\varphi\psi = \psi\varphi$, en dus is $K[f]$ een commutatieve deelring.

(ii) Uit Stelling 3.1.5 volgt dat $\dim \operatorname{End}(V) = n^2$. Omdat $K[f]$ een deelruimte is van $\operatorname{End}(V)$ besluiten we dat $\dim K[f] \leq n^2$.

(iii) De verzameling $\{1, f, f^2, f^3, \dots\} \subset K[f]$ brengt de ruimte $K[f]$ voort. Omdat $\dim K[f] \leq n^2$ eindig is, bestaat er een kleinste natuurlijk getal

d zodat $1, f, f^2, \ldots, f^d$ lineair afhankelijk is. (Inderdaad, elke verzameling van n^2+1 elementen van $K[f]$ is lineair afhankelijk.) Er is dus een lineaire relatie van de vorm

$$b_d f^d + \sum_{i=0}^{d-1} b_i f^i = 0$$

met $b_i \in K$. Merk op dat $b_d \neq 0$ omdat de elementen $1, f, f^2, \ldots, f^{d-1}$ anders reeds lineair afhankelijk zouden zijn, in strijd met de minimaliteit van d. Door deze relatie te delen door b_d verkrijgen we dus een lineaire relatie van de vorm

$$f^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i f^i = 0 \tag{3.2}$$

met $a_i \in K$, zodat in het bijzonder $f^d \in \langle 1, f, f^2, \ldots, f^{d-1} \rangle$. Per inductie volgt dat voor alle $k > d$ eveneens $f^k \in \langle 1, f, f^2, \ldots, f^{d-1} \rangle$. De verzameling $\{1, f, f^2, \ldots, f^{d-1}\}$ brengt dus $K[f]$ voort. Anderzijds volgt uit het feit dat d het *kleinste* natuurlijk getal is zodat $1, f, f^2, \ldots, f^d$ lineair afhankelijk is, dat de verzameling $\{1, f, f^2, \ldots, f^{d-1}\}$ lineair onafhankelijk is.

(iv) Merk op dat $\mu(x)$ inderdaad een monische veelterm is zodat $\mu(f) = 0$. Veronderstel nu dat er een veelterm $\psi(x)$ zou zijn van graad kleiner dan d zodat $\psi(f) = 0$; dan zou hieruit volgen dat er een lineaire relatie bestaat tussen de elementen $1, f, f^2, \ldots, f^{d-1}$, in strijd met (iii).

(v) Zij $\varphi(x) \in K[x]$ zodat $\varphi(f) = 0$. Uit Stelling 1.2.3 volgt dat er veeltermen $q(x), r(x) \in K[x]$ zijn met $\deg r(x) < \deg \mu(x)$ of $r(x) = 0$, zodat

$$\varphi(x) = \mu(x)q(x) + r(x)\,.$$

Hieruit volgt dat $0 = \varphi(f) = \mu(f)q(f) + r(f) = r(f)$; uit (iv) volgt dat $r(x) = 0$. We besluiten dat $\varphi(x) = \mu(x)q(x)$. $\square$

Definitie 3.2.3. Zij $f \in \operatorname{End}(V)$, V een K-vectorruimte. De monische veelterm $\mu_f(x)$ van kleinste graad waarvoor $\mu_f(f) = 0$ noemt men de *minimaalveelterm* van de operator f.

Opmerking 3.2.4. Als $\mu(x)$ de minimaalveelterm is van een lineaire operator $f \in \operatorname{End}(V)$, met V een n-dimensionale vectorruimte, dan is $\deg \mu = \dim K[f] \leq \dim \operatorname{End}(V) = n^2$. We zullen later zien dat $\dim K[f] \leq n$; zie Gevolg 5.4.11.

Opmerking 3.2.5. Het is belangrijk om het verschil in te zien tussen de veeltermenring $K[x]$ en de ring $K[f]$. Zo is $K[x]$ oneindig-dimensionaal, terwijl $K[f]$ eindig-dimensionaal is. Een ander verschil is dat $K[x]$ geen nuldelers bevat terwijl $K[f]$ nuldelers bevat zodra $\deg \mu_f > 1$. Zie ook Opmerking 3.1.10(ii).

3.3 Dualiteit

In deze paragraaf bestuderen we de ruimte $\mathrm{Hom}_K(V, K)$ in meer detail. Deze ruimte speelt een belangrijke rol in bepaalde deelgebieden van de theoretische fysica, en ook in de wiskunde duikt dualiteit in vele verschillende gedaanten op.

Definitie 3.3.1. (i) Zij V een K-vectorruimte. De *duale ruimte* V^* van V is de vectorruimte

$$V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K) = \{f\colon V \to K \mid f \text{ is een lineaire afbeelding}\},$$

waarbij we K beschouwen als 1-dimensionale K-vectorruimte.

(ii) De elementen van V^* noemen we ook *lineaire vormen op* V.

We willen de duale ruimte van een K-vectorruimte V nu explicieter voorstellen door te vertrekken van een basis van V. We maken gebruik van Stelling 3.1.5, en meer bepaald van de basis die we in het bewijs van deze stelling hebben ingevoerd, gegeven door de afbeeldingen (3.1).

Definitie 3.3.2. Zij V een eindig-dimensionale K-vectorruimte en $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ een basis voor V. Definieer de afbeeldingen

$$\varepsilon_i\colon V \to K\colon \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \mapsto a_i$$

voor alle $i = 1, \dots, n$. Deze afbeeldingen zijn lineair; het zijn dus lineaire vormen.

We hebben dat $\varepsilon_i(e_i) = 1$, en als $i \neq j$ is $\varepsilon_i(e_j) = 0$. Er geldt dus dat $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$, waarbij δ de Kronecker delta is die we ingevoerd hebben in Notatie 3.1.4.

Stelling 3.3.3. *Zij V een eindig-dimensionale K-vectorruimte, en $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ een basis voor V. Dan is $\mathcal{B}^* := \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ een basis voor V^*. In het bijzonder is $\dim V^* = \dim V$ en bijgevolg $V^* \cong V$.*

Bewijs. We passen Stelling 3.1.5 toe met $W = K$. Aangezien $\dim_K K = 1$, volgt uit deze stelling reeds onmiddellijk dat $\dim V^* = \dim V$ en bijgevolg $V^* \cong V$.

We bekijken nu de basis voor $\mathrm{Hom}_K(V, K)$ gegeven door de afbeeldingen (3.1). Merk op dat $m = 1$, zodat j enkel de waarde 1 kan aannemen. We kiezen voor $W = K$ de basis $\mathcal{C} = \{1\}$. Dan is

$$\begin{cases} f_{i1}(e_i) = 1, \\ f_{i1}(e_k) = 0 \quad \text{voor alle } k \neq i. \end{cases}$$

We stellen nu vast dat voor elke $i \in \{1, \dots, n\}$ inderdaad $f_{i1} = \varepsilon_i$, aangezien deze afbeeldingen samenvallen op de basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ van V; zie Opmerking 3.1.2. $\square$

Definitie 3.3.4. Zij $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ een basis voor de eindig-dimensionale K-vectorruimte V; dan noemen we de basis $\mathcal{B}^* = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ voor de duale ruimte V^* de *duale basis* van de basis $\mathcal{B}$.

Opmerking 3.3.5. Zij V een oneindig-dimensionale K-vectorruimte en $\mathcal{B}$ een basis van V. Net zoals in Definitie 3.3.2 definiëren we, voor iedere $b \in \mathcal{B}$,

$$\varepsilon_b \colon V \to K \colon \sum_{v \in \mathcal{B}} \lambda_v v \to \lambda_b.$$

Er geldt dat $\varepsilon_b \in V^*$. In dit geval is de verzameling $\{\varepsilon_b \mid b \in \mathcal{B}\}$ echter geen basis voor V^*! (Ze is wel lineair onafhankelijk, maar niet voortbrengend.) Sterker nog, voor oneindig-dimensionale vectorruimten is zelfs steeds $\dim V^* > \dim V$, en dus zijn V^* en V niet isomorf aan elkaar.

Voorbeeld 3.3.6. Voor de geïnteresseerde lezer geven we een voorbeeld ter toelichting van de vorige opmerking. Beschouw de oneindig-dimensionale K-vectorruimte $V = K[x]$ van veeltermen over een veld K, met basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots\}$. Als $b = x^k \in \mathcal{B}$, dan is de duale afbeelding ε_b de afbeelding $\varepsilon_b \colon K[x] \to K$ die een veelterm afbeeldt op de coëfficiënt horend bij de term x^k.

Beschouw nu de lineaire vorm $\varphi \colon K[x] \to K \colon f(x) \mapsto f(1)$. Dan is φ niet te schrijven als lineaire combinatie van de ε_b's. Inderdaad, stel dat $\varphi = \sum_{b \in \mathcal{B}} \lambda_b \varepsilon_b$, waarbij de som een eindige som is. Als het basiselement met hoogste graad dat voorkomt in deze som, gelijk is aan x^k, dan is $\varphi(x^{k+1}) = 0$, terwijl per definitie van φ we zouden moeten hebben dat $\varphi(x^{k+1}) = 1$; dit is een contradictie. We besluiten dat $\varphi \in V^*$ terwijl $\varphi \notin \mathrm{span}\{\varepsilon_b \mid b \in \mathcal{B}\}$.

Als $f \colon V \to W$ een lineaire afbeelding is, kunnen we met f een afbeelding $f^* \colon W^* \to V^*$ associëren.

Lemma 3.3.7. *Zij V en W twee K-vectorruimten, en $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding.*

(i) *Voor elke $\varphi \in W^*$ is $\varphi \circ f \in V^*$.*

(ii) *De afbeelding $f^*\colon W^* \to V^*\colon \varphi \mapsto \varphi \circ f$ is een lineaire afbeelding.*

Bewijs. (i) Aangezien $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ en $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(W, K)$, volgt uit Lemma 3.1.7 dat $\varphi \circ f \in \mathrm{Hom}_K(V, K) = V^*$.

(ii) Om na te gaan dat f^* een lineaire afbeelding is, gaan we na dat voor alle $\varphi, \psi \in W^*$ en alle $\lambda, \mu \in K$ geldt dat

$$f^*(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda f^*(\varphi) + \mu f^*(\psi)\,.$$

Dit is equivalent met de gelijkheid

$$(\lambda\varphi + \mu\psi) \circ f = \lambda(\varphi \circ f) + \mu(\psi \circ f)\,,$$

die volgt door beide leden te laten inwerken op elk element $v \in V$. □

Definitie 3.3.8. De lineaire afbeelding $f^*\colon W^* \to V^*\colon \varphi \mapsto \varphi \circ f$ noemen we de *duale afbeelding* van f.

Hoofdstuk

4 Inproduct-ruimten

Tot nog toe hebben we voornamelijk gewerkt met vectorruimten over willekeurige velden. Wanneer we werken met vectorruimten over de reële of de complexe getallen, krijgt onze vectorruimte bijkomende structuur; we kunnen dergelijke vectorruimten voorzien van een *inproduct*. Hierdoor zullen we in staat zijn te spreken over afstanden, orthogonaliteit en dergelijke meer.

4.1 Inproduct-ruimten

We beginnen met de algemene definitie van een inproduct-ruimte. We zullen vaak de definities en eigenschappen omtrent het veld $\mathbb{C}$ in Definitie 1.1.1 en Lemma 1.1.2 gebruiken; we doen dit vaak zonder expliciete referenties te geven.

Definitie 4.1.1. Zij V een vectorruimte over het veld $K = \mathbb{R}$ of $K = \mathbb{C}$. Een afbeelding $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K$ wordt een *inproduct* op V genoemd, als aan de volgende voorwaarden is voldaan:

- [*toegevoegd-symmetrisch*] $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ voor alle $v, w \in V$, in het bijzonder is $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$ voor alle $v \in V$;
- [*lineair in het eerste argument*] $\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$ voor alle $u, v, w \in V$ en alle $a, b \in K$;
- [*positief-definiet*] $\langle v, v \rangle > 0$ voor alle $v \in V \setminus \{0\}$.

Het paar $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ wordt dan een *inproduct-ruimte* genoemd; het inproduct zelf wordt vaak weggelaten indien het duidelijk is uit de context, en men zegt dan eenvoudigweg dat V een inproduct-ruimte is.

Als V een inproduct-ruimte is, dan definiëren we de *norm* van een element $v \in V$ als

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Voor we verder gaan, vermelden we een aantal eenvoudige gevolgen van de definiërende eigenschappen van inproduct-ruimten.

Lemma 4.1.2. *Zij* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *een inproduct-ruimte over* $K = \mathbb{R}$ *of* $\mathbb{C}$*. Dan gelden volgende eigenschappen, voor alle* $u, v, w \in V$ *en alle* $\lambda, \mu \in K$*.*

(i) *[bi-additiviteit]* $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ *en* $\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$*;*

(ii) *[sesqui-lineariteit]* $\langle \lambda v, \mu w\rangle = \lambda\overline{\mu} \cdot \langle v, w\rangle$*;*

(iii) *[homogeniteit van de norm]* $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$.

Bovendien is $\langle\cdot,\cdot\rangle$ niet-ontaard*, i.e. als* $u \in V$ *zodanig is dat* $\langle u, v\rangle = 0$ *voor alle* $v \in V$*, dan is noodzakelijk* $u = 0$*.*

Bewijs. Oefening. □

De norm geeft aanleiding tot een notie van afstand, en op deze wijze wordt V een zogenaamde *metrische ruimte*.

Definitie 4.1.3. Zij V een inproduct-ruimte. Dan definiëren we, voor elke twee elementen $v, w \in V$, de *afstand* tussen v en w als

$$\mathrm{dist}(v, w) := \|w - v\| \,.$$

Uit Lemma 4.1.2(iii) zien we dat dist symmetrisch is, i.e. $\mathrm{dist}(v, w) = \mathrm{dist}(w, v)$ voor alle $v, w \in V$.

We geven een aantal voorbeelden van inproduct-ruimten. Voorbeelden 4.1.4(1) en (2) zullen regelmatig gebruikt worden in het vervolg van de cursus.

Voorbeelden 4.1.4. (1) Zij $K = \mathbb{R}$, en $V = \mathbb{R}^n$. Dan definiëren we het *standaard inproduct* op V als de afbeelding

$$\langle\cdot,\cdot\rangle \colon V \times V \to K \colon (v, w) \mapsto v^t \cdot w \,,$$

of expliciet,

$$\langle (x_1, \dots, x_n)^t, (y_1, \dots, y_n)^t\rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \,.$$

Dit inproduct wordt ook het *Euclidische inproduct* genoemd, en deze inproduct-ruimte wordt de *Euclidische n-dimensionale ruimte*[1] genoemd. Soms wordt hiervoor de notatie $\mathbb{E}^n$ gebruikt.
We verkrijgen de volgende formule voor de afstand tussen twee vectoren:

$$\mathrm{dist}((x_1, \dots, x_n)^t, (y_1, \dots, y_n)^t) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} \,.$$

[1]Genoemd naar Euclides van Alexandrië, een Hellenistisch wiskundige, die rond het jaar 300 v.Chr. werkzaam was in de bibliotheek van Alexandrië. Hij wordt soms de "vader van de meetkunde" genoemd.

(2) Zij $K = \mathbb{C}$, en $V = \mathbb{C}^n$. Dan definiëren we het *standaard inproduct* op V als de afbeelding

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to K \colon (v, w) \mapsto v^t \cdot \overline{w}\,,$$

waarbij $\overline{w}$ de vector is die bekomen wordt door de complexe toevoeging te nemen van de coördinaten van w; expliciet is

$$\langle (x_1, \dots, x_n)^t, (y_1, \dots, y_n)^t \rangle = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}\,.$$

(3) Zij V een 4-dimensionale vectorruimte over $\mathbb{R}$, en zij $(e_1, \dots, e_4)$ een basis voor V. We definiëren nu

$$\langle (x_1, \dots, x_4), (y_1, \dots, y_4) \rangle := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4\,.$$

Dan is $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een zogenaamde *Minkowski*[2] *ruimte*, en $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wordt het *Minkowski inproduct* genoemd. Nochtans is $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *géén* inproduct-ruimte! Inderdaad, deze afbeelding is symmetrisch en lineair, maar niet positief-definiet. De Minkowski ruimte speelt een belangrijke rol in de fysica, voornamelijk in Einstein's speciale relativiteitstheorie; de eerste drie dimensies stellen de 3-dimensionale ruimte voor, terwijl de vierde dimensie de tijd voorstelt. Een vector in de Minkowski ruimte wordt dan ook een *event* (gebeurtenis) genoemd.

(4) Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$, en zij $C[a, b]$ de verzameling van continue complexwaardige functies op het interval $[a, b]$. Stel

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt\,.$$

Dan is $(C[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een (oneindig-dimensionale) inproduct-ruimte.

(5) Zij B een oneindige verzameling. We definiëren de *reeksruimte* $\ell^2(B)$ (lees: kleine el-twee van B) als

$$\ell^2(B) := \left\{ f \colon B \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{b \in B} |f(b)|^2 < \infty \right\}.$$

Dan definieert

$$\langle f, g \rangle := \sum_{b \in B} f(b)\overline{g(b)}$$

een inproduct op $\ell^2(B)$.

[2] Genoemd naar de Duitse wiskundige Hermann Minkowski (1864–1909).

Opmerking 4.1.5. Voor de geïnteresseerde lezer vermelden we dat een inproduct-ruimte $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een *Hilbertruimte* [3] genoemd wordt als V *compleet* is als metrische ruimte, d.w.z. dat elke Cauchy-rij in V convergeert naar een element van V. In het bijzonder is elke eindig-dimensionale inproduct-ruimte een Hilbertruimte. (We verwijzen de wiskundigen naar een toekomstige cursus Analyse voor een nauwkeurige behandeling van deze begrippen in algemene metrische ruimten.) De inproduct-ruimte in Voorbeeld 4.1.4(4) is géén Hilbertruimte; de inproduct-ruimte in Voorbeeld 4.1.4(5) is dat wél.

Hilbertruimten over $\mathbb{C}$ spelen een cruciale rol in de kwantummechanica. Hierbij wordt de status van een fysisch systeem voorgesteld door een vector (of preciezer nog, door een straal van vectoren) in een complexe Hilbertruimte, en wordt voorgesteld als een zogenaamde *ket* die als $|\psi\rangle$ wordt genoteerd. De elementen van de *duale* Hilbertruimte worden *bra*s genoemd en als $\langle\phi|$ genoteerd. Deze bras beelden dus kets af op complexe getallen, en dit geeft aanleiding tot Paul Dirac's *bra-ket* notatie $\langle\phi|\psi\rangle := \langle\phi|\,(|\psi\rangle) \in \mathbb{C}$. Deze bra-kets komen precies overeen met het inproduct van de oorspronkelijke Hilbertruimte.

Opmerking 4.1.6. De geïnteresseerde lezer kan zich afvragen waarom we ons bij het bestuderen van inproduct-ruimten beperken tot $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, en niet werken over willekeurige velden. Een eerste beperking die zich uiteraard opdringt, is dat we het begrip "positief" moeten kunnen definiëren (het inproduct moet positief-definiet zijn), en daarom moet ons veld in elk geval een *geordend deelveld* bevatten en bijgevolg karakteristiek[4] 0 hebben. Ten tweede moet elk positief element het kwadraat zijn van een ander element van het veld; dit is immers nodig om de norm te kunnen definiëren als de vierkantswortel van een zeker element. Ten derde willen we (om diepgaandere redenen) dat in elk geval de eindig-dimensionale inproduct-ruimten steeds compleet zijn als metrische ruimten, en dat blijkt bijvoorbeeld nooit het geval te zijn als het onderliggend veld een eigenlijk deelveld van $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$ zou zijn.

We bewijzen een belangrijke eigenschap in verband met de norm van willekeurige inproduct-ruimten.

Stelling 4.1.7 (Ongelijkheid van Cauchy–Schwarz[5])**.** *Zij V een inproduct-*

[3] Genoemd naar de Duitse wiskundige David Hilbert (1862–1943), één van de meest invloedrijke en universele wiskundigen van de 19e en vroege 20e eeuw.

[4] De *karakteristiek* van een veld is het kleinste geheel getal $n > 0$ zodat $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ keer}} = 0$ indien een dergelijke n bestaat; in het andere geval stellen we de karakteristiek gelijk aan 0.

[5] Genoemd naar de Franse wiskundige Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) en de Duitse wiskundige Karl Hermann Amandus Schwarz (1843–1921).

ruimte over $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$, en $v, w \in V$ willekeurig. Dan geldt steeds

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|\,,$$

en de gelijkheid geldt dan en slechts dan als v en w lineair afhankelijk zijn.

Bewijs. Indien $w = 0$ is de bewering triviaal voldaan; stel dus $w \neq 0$. Als $v = \lambda w$ voor zekere $\lambda \in \mathbb{C}$, dan is

$$|\langle v, w\rangle| = |\langle \lambda w, w\rangle| = |\lambda| \cdot |\langle w, w\rangle| = |\lambda| \cdot \|w\|^2 = \|\lambda w\| \cdot \|w\| = \|v\| \cdot \|w\|.$$

Veronderstel dus $v \neq \lambda w$ voor alle $\lambda \in \mathbb{C}$, en definieer nu $\lambda = \langle w, w\rangle^{-1}\langle v, w\rangle$. Merk op dat $\overline{\lambda} = \langle w, w\rangle^{-1}\langle w, v\rangle$, en bijgevolg

$$\lambda\langle w, v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle = \langle w, w\rangle^{-1}\langle v, w\rangle\langle w, v\rangle\,.$$

Omdat het inproduct positief-definiet is, is

$$\begin{aligned}
0 &< \langle v - \lambda w, v - \lambda w\rangle \\
&= \langle v, v\rangle - \lambda\langle w, v\rangle - \overline{\lambda}\langle v, w\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle \\
&= \langle v, v\rangle - \langle w, w\rangle^{-1}\langle v, w\rangle\langle w, v\rangle \\
&= \|v\|^2 - \|w\|^{-2}|\langle v, w\rangle|^2
\end{aligned}$$

en omdat zowel $\|v\|$, $\|w\|$ als $|\langle v, w\rangle|$ niet-negatieve reële getallen zijn, volgt het resultaat. □

Een gevolg van de ongelijkheid van Cauchy–Schwarz is dat de norm aan de driehoeksongelijkheid voldoet.

Gevolg 4.1.8 (Driehoeksongelijkheid)**.** *Zij $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ een inproduct-ruimte over $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$. Dan geldt voor alle $v, w \in V$ dat*

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|\,.$$

Bewijs. We hebben

$$\begin{aligned}
\|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle \\
&= \|v\|^2 + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \|w\|^2 \\
&= \|v\|^2 + \langle v, w\rangle + \overline{\langle v, w\rangle} + \|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2 + 2|\langle v, w\rangle| + \|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 \quad \text{(Cauchy–Schwarz)} \\
&= \big(\|v\| + |w\|\big)^2\,.
\end{aligned}$$

□

4.2 Orthogonaliteit

We hebben reeds gezien dat we in een willekeurige inproduct-ruimte een zinvolle notie van afstand hebben. Ook het begrip “orthogonaliteit”, of anders gezegd, het “loodrecht op elkaar staan” van vectoren, houdt steek in een willekeurige inproduct-ruimte. We kunnen niet zomaar een goed begrip van hoek definiëren op een eenvoudige manier, maar we zullen in Hoofdstuk 7 zien dat dit wel kan bij reële inproduct-ruimten.

Definitie 4.2.1. Beschouw een inproduct-ruimte $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

(i) Een vector $v \in V$ staat *loodrecht* op een vector $w \in V$ als

$$\langle v, w \rangle = 0 \,.$$

Merk op dat de relatie “loodrecht op” symmetrisch is. We zeggen ook dat de vectoren v en w *orthogonaal* zijn (ten opzichte van elkaar). We noteren dit met $v \perp w$.

(ii) Een basis $\mathcal{B}$ voor V wordt *orthonormaal* genoemd als geldt dat $\langle b, b' \rangle = 0$ voor alle $b \neq b' \in \mathcal{B}$ en $\langle b, b \rangle = 1$ voor alle $b \in \mathcal{B}$. Dit betekent dus dat de basiselementen twee aan twee loodrecht op elkaar staan, en elk norm 1 hebben.

(iii) Als $W \leq V$ een deelruimte is, noemen we

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ voor alle } w \in W\}$$

het *orthogonaal complement* van W.

In Lemma 4.2.5 tonen we aan dat $W^\perp$ een complement (zie Definitie 2.3.7) is van W, met andere woorden dat $W \oplus W^\perp = V$.

Lemma 4.2.2. *Het orthogonaal complement $W^\perp$ van een deelruimte $W \leq V$ is een deelruimte van V. Er geldt dat $W \cap W^\perp = \{0\}$.*

Bewijs. Stel dat $v_1, v_2 \in W^\perp$ en $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Dan is

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle = \lambda_1 \langle v_1, w \rangle + \lambda_2 \langle v_2, w \rangle = 0$$

voor iedere $w \in W$, en dus $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W^\perp$; bijgevolg is $W^\perp$ een deelruimte.

Stel nu dat $v \in W \cap W^\perp$; dan is $\langle v, v \rangle = 0$, en uit het positief-definiet zijn volgt dat $v = 0$. □

Voorbeeld 4.2.3. (1) Zij $K = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$, en beschouw de vectorruimte K^n met het standaard inproduct. Het is duidelijk dat de standaardbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ een orthonormale basis is.

(2) Zij $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ een inproduct-ruimte. Als $\{v_1, \dots, v_n\}$ een basis is van V waarvoor $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ voor alle $i \neq j$, dan is

$$\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}$$

een orthonormale basis van V.

In de volgende stelling wordt aangetoond dat iedere eindig-dimensionale deelruimte een orthonormale basis bezit. Op het einde van dit hoofdstuk zullen we een efficiënte expliciete methode geven om een dergelijke orthonormale basis te construeren; zie Stelling 4.2.11 verderop.

Stelling 4.2.4. *Zij $K = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$, en zij $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ een eindig-dimensionale inproduct-ruimte over K. Zij W een deelruimte van V met $\dim W = d \geq 1$. Dan bezit W een orthonormale basis $\{b_1, \dots, b_d\}$.*

Bewijs. We bewijzen de uitspraak met inductie naar d.

Veronderstel dus eerst dat $d = 1$, en zij $0 \neq w \in W$, dan is $\{b_1\}$ met

$$b_1 = \frac{1}{\|w\|} w$$

de gezochte basis.

Veronderstel nu dat $d > 1$; de inductiehypothese stelt dat de uitspraak waar is voor deelruimten van dimensie $d-1$, en we bewijzen de uitspraak nu voor een willekeurige deelruimte W van dimensie d.

Zij $0 \neq w \in W$ en definieer de één-dimensionale vectorruimte $W' = Kw$. Beschouw de lineaire vorm

$$\langle\cdot, w\rangle \colon W \to K \colon v \mapsto \langle v, w\rangle \, ;$$

merk op dat deze lineaire vorm surjectief is vermits $\langle w, w\rangle \neq 0$. De kern van deze lineaire vorm is precies het orthogonaal complement $(W')^\perp$ van W' in W.

Vermits de dimensie van de kern plus de dimensie van het beeld gelijk is aan de dimensie van W bekomen we

$$\dim(W')^\perp = \dim W - \dim K = d - 1 \, .$$

De inductiehypothese impliceert dat $(W')^\perp$ een basis $\{b_2, \dots, b_d\}$ bezit met $\langle b_i, b_j\rangle = 0$ voor alle $i \neq j$ en $\langle b_i, b_i\rangle = 1$ voor alle $i \in \{2, \dots, d\}$. Neem $b_1 = \frac{1}{\|w\|} w$; dan is $\{b_1\}$ een basis voor W'. Omdat $W' \cap (W')^\perp = 0$, volgt hieruit dat $\{b_1, \dots, b_d\}$ een basis is voor W. Men verifieert nu eenvoudig dat deze basis voldoet aan de gezochte eigenschappen. $\square$

Lemma 4.2.5. *Zij $K = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$, en zij $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ een eindig-dimensionale inproduct-ruimte over K. Voor elke deelruimte $W \leq V$ is het orthogonaal complement $W^\perp$ in V een complementaire ruimte, i.e. $W \oplus W^\perp = V$.*

In het bijzonder is $\dim(W^\perp) = \dim V - \dim W$.

Bewijs. Vermits $W \cap W^\perp = \{0\}$ wegens Lemma 4.2.2 moeten we enkel nog aantonen dat $W + W^\perp = V$.

Zij $\{b_1, \dots, b_d\}$ een orthonormale basis voor W. Zij $v \in V$; dan is

$$v = \sum_{i=1}^{d} \langle v, b_i\rangle b_i + \Big(v - \sum_{i=1}^{d} \langle v, b_i\rangle b_i\Big).$$

De eerste term is een element van W. We tonen aan dat de tweede term $(v - \sum_{i=1}^{d} \langle v, b_i\rangle b_i) \in W^\perp$. Het volstaat om aan te tonen dat ieder basiselement van W loodrecht staat op $(v - \sum_{i=1}^{d} \langle v, b_i\rangle b_i)$. Neem $b_j \in \{b_1, \dots, b_d\}$ willekeurig, dan is

$$\Big\langle v - \sum_{i=1}^{d} \langle v, b_i\rangle b_i,\, b_j \Big\rangle = \langle v, b_j\rangle - \sum_{i=1}^{d} \langle v, b_i\rangle \langle b_i, b_j\rangle = \langle v, b_j\rangle - \langle v, b_j\rangle = 0. \quad \square$$

Gevolg 4.2.6. *Zij $K = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$, en zij $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ een eindig-dimensionale inproduct-ruimte over K. Voor elke deelruimte $W \leq V$ is $(W^\perp)^\perp = W$.*

Bewijs. De inclusie $W \leq (W^\perp)^\perp$ is evident (denk goed na over de betekenis van $(W^\perp)^\perp$). Omdat $\dim(W^\perp)^\perp = \dim V - (\dim V - \dim W) = \dim W$, volgt nu dat de inclusie een gelijkheid is. $\square$

Het is interessant om vast te stellen dat in willekeurige inproduct-ruimten een eigenschap geldt die een veralgemening is van de stelling van Pythagoras.

Stelling 4.2.7. *Zij $K = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$, en zij $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ een willekeurige inproduct-ruimte over K. Zij $v, w \in V$ met $v \perp w$. Dan is $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.*

Bewijs. Omdat $v \perp w$ is $\langle v, w\rangle = 0$, en dus

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle \\ &= \|v\|^2 + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 + \langle v, w\rangle + \overline{\langle v, w\rangle} + \|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2. \end{aligned}$$

$\square$

Tot slot van deze paragraaf bespreken we de orthogonale projectie op een deelruimte.

Definitie 4.2.8. Zij $K = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$, en zij $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een eindig-dimensionale inproduct-ruimte over K.

(i) Beschouw een deelruimte $W \leq V$ en een element $v \in V$. Aangezien $V = W \oplus W^\perp$, is elke $v \in V$ op een unieke manier te schrijven als $v = w + u$ met $w \in W$ en $u \in W^\perp$. We definieren de *orthogonale projectie* van v op W als het element $w \in W$, en we noteren dit als $\mathrm{proj}_W(v) := w$.

(ii) Als W een 1-dimensionale deelruimte is, stel $W = \langle w \rangle$, dan noteren we $\mathrm{proj}_W(v)$ ook als $\mathrm{proj}_w(v)$.

Lemma 4.2.9. *Zij $K = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$, en zij $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een eindig-dimensionale inproduct-ruimte over K. Beschouw een deelruimte $W \leq V$.*

(i) *Voor alle $w \in W$ is $\mathrm{proj}_W(w) = w$; voor alle $u \in W^\perp$ is $\mathrm{proj}_W(u) = 0$. In het bijzonder is de orthogonale projectie een projectie-operator in de betekenis van Definitie* 2.4.7.

(ii) *Zij $\{w_1, \cdots w_k\}$ een orthonormale basis van W. Dan is*

$$\mathrm{proj}_W(v) = \sum_{j=1}^{k} \langle v, w_j \rangle w_j$$

voor elke $v \in V$.

(iii) *Zij $w \in W$ met $w \neq 0$. Dan is*

$$\mathrm{proj}_w(v) = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w$$

voor elke $v \in V$.

Bewijs. (i) Dit volgt uit $w = w + 0 \in W \oplus W^\perp$ en $u = 0 + u \in W \oplus W^\perp$.

(ii) Net als in het bewijs van Gevolg 4.2.5 is

$$v = \sum_{i=1}^{k} \langle v, w_i \rangle w_i + (v - \sum_{i=1}^{k} \langle v, w_i \rangle w_i) \in W \oplus W^\perp.$$

(iii) Stel $W = \langle w \rangle$; dan is $\{w/\|w\|\}$ een orthonormale basis voor W. Uit (ii) volgt dan dat

$$\mathrm{proj}_w(v) = \mathrm{proj}_W(v) = \left\langle v, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle \frac{w}{\|w\|} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w. \qquad \square$$

We tonen nu aan dat de kortste afstand van een element tot een gegeven deelruimte gegeven wordt door de orthogonale projectie.

Stelling 4.2.10. *Zij $K = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$, en zij $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ een eindig-dimensionale inproduct-ruimte over K. Beschouw een deelruimte $W \leq V$ en $v \in V$. Dan geldt voor elke $w \in W \setminus \{\mathrm{proj}_W(v)\}$ dat $\mathrm{dist}(v, w) > \mathrm{dist}(v, \mathrm{proj}_W(v))$.*

Bewijs. We herschrijven $\mathrm{dist}(v, w)$ op volgende manier:

$$\mathrm{dist}(v, w) = \|v - w\| = \|(\mathrm{proj}_W(v) - w) + (v - \mathrm{proj}_W(v))\|.$$

Uit de definitie van de orthogonale projectie volgt dat $\mathrm{proj}_W(v) - w \in W$ en $v - \mathrm{proj}_W(v) \in W^\perp$, dus

$$(\mathrm{proj}_W(v) - w) \perp (v - \mathrm{proj}_W(v)).$$

Uit Stelling 4.2.7 volgt dus dat

$$\mathrm{dist}(v, w)^2 = \|\mathrm{proj}_W(v) - w\|^2 + \|v - \mathrm{proj}_W(v)\|^2.$$

Omdat $w \neq \mathrm{proj}_W(v)$, is $\|\mathrm{proj}_W(v) - w\| > 0$. We besluiten dat

$$\mathrm{dist}(v, w)^2 > \|v - \mathrm{proj}_W(v)\|^2 = \mathrm{dist}(v, \mathrm{proj}_W(v))^2,$$

en het resultaat volgt omdat afstanden niet-negatieve reële getallen zijn. □

Tot slot geven we de beloofde methode om een orthonormale basis te construeren: het zogenaamde Gram–Schmidt orthonormalisatieproces.

Stelling 4.2.11 (Gram–Schmidt[6] orthonormalisatieproces)**.** *Zij $K = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$, en zij $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ een eindig-dimensionale inproduct-ruimte over K. Zij W een deelruimte van V met basis $\{v_1, \ldots, v_d\}$. We definiëren nu, op recursieve wijze,*

$$\begin{aligned}
b_1 &= v_1, \\
b_2 &= v_2 - \mathrm{proj}_{b_1}(v_2), \\
b_3 &= v_3 - \mathrm{proj}_{b_1}(v_3) - \mathrm{proj}_{b_2}(v_3), \\
b_4 &= v_4 - \mathrm{proj}_{b_1}(v_4) - \mathrm{proj}_{b_2}(v_4) - \mathrm{proj}_{b_3}(v_4), \\
&\vdots \\
b_d &= v_d - \sum_{i=1}^{d-1} \mathrm{proj}_{b_i}(v_d).
\end{aligned}$$

[6] Genoemd naar de Deense actuaris en wiskundige Jørgen Pedersen Gram (1850–1916) en de Duitse wiskundige Erhard Schmidt (1876–1959), hoewel dit reeds eerder verschenen was in werk van Laplace en Cauchy.

Dan is $\{b_1, \ldots, b_d\}$ een orthogonale basis voor W, en dus is

$$\left\{ \frac{b_1}{\|b_1\|}, \ldots, \frac{b_d}{\|b_d\|} \right\}$$

een orthonormale basis voor W.

Bewijs. We bewijzen eerst dat $\{b_1, \ldots, b_d\}$ een basis is voor W. Per definitie van de elementen b_i geldt dat $v_i \in \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_i)$ voor elke i, zodat $V = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_d) \leq \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_d)$. Hieruit volgt dat de verzameling $\{b_1, \ldots, b_d\}$ voortbrengend is voor W, en aangezien ze precies $d = \dim W$ elementen bevat, kunnen we uit Stelling 2.2.12(ii) besluiten dat ze een basis is.

We bewijzen nu de orthogonaliteit. Door Lemma 4.2.9(iii) te gebruiken zien we dat de algemene formule om b_j te bepalen gegeven wordt door

$$b_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} b_i. \tag{4.1}$$

We bewijzen nu per inductie op j dat b_j orthogonaal staat op alle b_k met $k < j$. Voor $j = 1$ valt er niks te bewijzen. Stel dus $j > 1$, en veronderstel dat we reeds weten (door de inductiehypothese) dat $b_\ell \perp b_m$ voor alle $\ell < m < j$. Dan is

$$\langle b_\ell, b_m \rangle = \delta_{\ell m} \langle b_\ell, b_\ell \rangle$$

voor alle $\ell, m < j$. We maken nu gebruik van (4.1), en we bekomen, voor alle $k < j$, dat

$$\begin{aligned}
\langle b_j, b_k \rangle &= \langle v_j, b_k \rangle - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} \langle b_i, b_k \rangle \\
&= \langle v_j, b_k \rangle - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} \delta_{ik} \langle b_i, b_i \rangle \\
&= \langle v_j, b_k \rangle - \frac{\langle v_j, b_k \rangle}{\langle b_k, b_k \rangle} \langle b_k, b_k \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dit toont aan dat $b_j \perp b_k$ voor alle $k < j$. $\square$

Hoofdstuk 5

Matrices en determinanten

5.1 Coördinaten en matrixvoorstellingen van lineaire afbeeldingen

In Gevolg 2.4.14 hebben we gezien dat elke n-dimensionale K-vectorruimte V isomorf is met de kolommenruimte K^n. Zo een isomorfisme hangt echter af van de keuze van een basis.

Definitie 5.1.1. Zij K een veld, zij V een n-dimensionale K-vectorruimte, en zij $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ een basis in V.

(i) Als $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$, dan noemen we $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t$ de *coördinatenvector* van v ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$. De elementen λ_i zijn de *coördinaten* van v ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$.

(ii) Het isomorfisme

$$\beta \colon V \to K^n \colon \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \mapsto (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t,$$

noemen we het *coördinatenisomorfisme* ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$.

Merk op dat het coördinatenisomorfisme ten opzichte van de basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ iedere b_i afbeeldt op e_i, waarbij $(e_1, \ldots, e_n)$ de standaardbasis is van K^n.

We kunnen aan iedere lineaire afbeelding tussen twee eindig dimensionale vectorruimten een matrix associeren. Deze matrix hangt echter af van de keuze van de basissen.

Definitie 5.1.2. Zij V een n-dimensionale K-vectorruimte en W een m-dimensionale K-vectorruimte, en zij $f \colon V \to W$ een lineaire afbeelding. Beschouw een basis $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ van V en een basis $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_m\}$ van W.

Voor iedere $j = 1, \ldots, n$ is $f(b_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} c_i$ voor bepaalde scalairen $a_{ij} \in K$. De matrix $(a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ noemen we de *matrixvoorstelling* van f ten opzichte van de basissen $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$.

We noteren de matrixvoorstelling van f ten opzichte van de basissen $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ als $A_{f,\mathcal{B},\mathcal{C}}$ of als A_f als het duidelijk is uit de context welke basissen we beschouwen.

Opmerking 5.1.3. Zij A_f de matrixvoorstelling van $f: V \to W$ ten opzichte van de basissen $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ en $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_m\}$. Uit de definitie volgt dat de j-de kolom van A_f de coördinatenvector van $f(b_j)$ ten opzichte van de basis $\mathcal{C}$ is.

In de praktijk stellen we de matrixvoorstelling A_f van een lineaire afbeelding f op door de coördinatenvectoren van $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ t.o.v. $\mathcal{C}$ in de kolommen van A_f te schrijven.

Lemma 5.1.4. *Zij V een n-dimensionale K-vectorruimte en W een m-dimensionale K-vectorruimte. Beschouw een basis $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ van V en een basis $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_m\}$ van W.*

(i) *Voor iedere matrix $A \in M_{m,n}(K)$ bestaat er een lineaire afbeelding $f: V \to W$ waarvoor $A_{f,\mathcal{B},\mathcal{C}} = A$.*

(ii) *Zij $v \in V$ met $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t$ de coördinatenvector van v t.o.v. de basis $\mathcal{B}$. Beschouw de coördinatenvector $(\mu_1, \ldots, \mu_m)^t$ van $f(v)$ t.o.v. de basis $\mathcal{C}$. Dan is*

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = A_{f,\mathcal{B},\mathcal{C}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Bewijs. (i) Een lineaire afbeelding $f: V \to W$ is volledig bepaald door de elementen $f(b_1), \ldots, f(b_n)$. We definiëren $f: V \to W$ door te stellen dat de coördinatenvector van $f(b_i)$ ten opzichte van de basis $\mathcal{C}$ de i-de kolom van de matrix A is. Het gestelde volgt dan onmiddellijk.

(ii) Zij $(a_{ij}) = A_{f,\mathcal{B},\mathcal{C}}$. Aangezien $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$ is

$$f(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(b_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Big(\sum_{k=1}^m a_{ki} c_k\Big) = \sum_{k=1}^m \Big(\sum_{i=1}^n a_{ki}\lambda_i\Big) c_k.$$

Er volgt dat de coördinatenvector van $f(v)$ ten opzichte van $\mathcal{C}$ gegeven is door $(\sum_{i=1}^n a_{1i}\lambda_i, \ldots, \sum_{i=1}^n a_{mi}\lambda_i)^t$. Hieruit volgt het gestelde. □

Opmerking 5.1.5. (i) De constructie van f in het bovenstaand bewijs van Lemma 5.1.4(i) impliceert dat een lineaire afbeelding volledig bepaald is door zijn matrixvoorstelling ten opzichte van bepaalde basissen.

(ii) Zij $\beta: V \to K^n$ het coördinatenisomorfisme ten opzichte van een basis $\mathcal{B}$, en zij $\gamma: W \to K^m$ het coördinatenisomorfisme ten opzichte van een basis $\mathcal{C}$. Uit Lemma 5.1.4(ii) volgt dat voor alle $v \in V$ geldt dat

$\gamma(f(v)) = A_f \cdot \beta(v)$. Bijgevolg is $\gamma \circ f = L_{A_f} \circ \beta$. Dit geven we schematisch weer door middel van een zogenaamd *commutatief diagram*:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta"'] & W \arrow[d, "\gamma"] \\ K^n \arrow[r, "L_{A_f}"'] & K^m \end{tikzcd}$$

We kunnen nu aantonen dat iedere lineaire afbeelding van K^n naar K^m gegeven is door linkse vermenigvuldiging met een matrix.

Gevolg 5.1.6. *Zij $f\colon K^n \to K^m$ een lineaire afbeelding. Dan bestaat er een matrix $A \in M_{m,n}(K)$ zodat $f = L_A$.*

Bewijs. We beschouwen de standaardbasis $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ van K^n en de standaardbasis $\mathcal{C} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ van K^m. Als $v = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t \in K^n$, dan is de coördinatenvector van v t.o.v. $\mathcal{B}$ ook gegeven door $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t$.

Definieer de matrix $A := A_{f,\mathcal{B},\mathcal{C}} \in M_{m,n}(K)$. Uit Lemma 5.1.4(ii) volgt nu dat $f = L_A$. $\square$

De verzamelingen $\mathrm{End}_K(V)$ en $M_n(K)$ hebben beide de structuur van een K-vectorruimte en van een ring. In Stelling 5.1.8 tonen we aan dat de bewerkingen van deze structuren compatibel zijn met de afbeelding die elke $f \in \mathrm{End}_K(V)$ afbeeldt op de corresponderende matrix $A_f \in M_n(K)$.

We tonen eerst volgend lemma aan:

Lemma 5.1.7. *Zij V een n-dimensionale vectorruimte met basis $\mathcal{B}$, en zij $\beta\colon V \to K^n$ het coördinatenisomorfisme ten opzichte van $\mathcal{B}$. Zij $A, B \in M_{m,n}(K)$. Als voor alle $v \in V$ geldt dat $A\beta(v) = B\beta(v)$, dan is $A = B$.*

Bewijs. Stel $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$; dan is $\beta(b_i) = e_i$, en bijgevolg is $A\beta(b_i) = Ae_i$ gelijk aan de i-de kolom van A, en is $B\beta(b_i) = Be_i$ gelijk aan de i-de kolom van B.

We hebben dat $A\beta(b_i) = B\beta(b_i)$ voor alle $i = 1, \ldots, n$; bijgevolg is de i-de kolom van A gelijk aan de i-de kolom van B voor alle $i = 1, \ldots, n$. Hieruit volgt dat $A = B$. $\square$

Stelling 5.1.8. *Zij V een n-dimensionale K-vectorruimte, W een m-dimensionale K-vectorruimte, en U een t-dimensionale K-vectorruimte. Kies een basis $\mathcal{B}$ voor V, $\mathcal{C}$ voor W en $\mathcal{D}$ voor U.*

(i) *De afbeelding*

$$\mathrm{Hom}_K(V,W) \to M_{m,n}(K) \colon f \mapsto A_f$$

(t.o.v. de basissen $\mathcal{B}$ *en* $\mathcal{C}$*) is een isomorfisme van* K*-vectorruimten.*

(ii) *Beschouw de afbeeldingen*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_K(V,W) &\to M_{m,n}(K) \colon\ f \mapsto A_f\,, \\ \mathrm{Hom}_K(W,U) &\to M_{t,m}(K) \colon\ g \mapsto A_g\,, \\ \mathrm{Hom}_K(V,U) &\to M_{t,n}(K) \ \colon\ h \mapsto A_h\,, \end{aligned}$$

die we in (i) *hebben ingevoerd. Dan geldt voor alle* $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ *en alle* $g \in \mathrm{Hom}_K(W,U)$ *dat* $A_{g\circ f} = A_g A_f$.

(iii) *De afbeelding*

$$\mathrm{End}_K(V) \to M_n(K) \colon f \mapsto A_f$$

(t.o.v. de basis $\mathcal{B}$*) is een isomorfisme van* K*-vectorruimten, en voor alle* $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V)$ *geldt dat* $A_{g\circ f} = A_g A_f$.

(iv) *Zij* $f \in \mathrm{End}_K(V)$*, en zij* A_f *de corresponderende matrix t.o.v. de basis* $\mathcal{B}$*. Dan is* f *inverteerbaar als en slechts als* A_f *inverteerbaar is, en in dat geval is* $(A_f)^{-1} = A_{f^{-1}}$*. We hebben dus een bijectieve afbeelding*

$$\mathsf{GL}_K(V) \to \mathsf{GL}_n(K) \colon f \mapsto A_f\,,$$

en voor alle $f, g \in \mathsf{GL}_K(V)$ *is* $A_{g\circ f} = A_g A_f$.

Bewijs. (i) We verifiëren dat de afbeelding $f \mapsto A_f$ lineair is, met andere woorden dat

$$A_{\lambda f + \mu g} = \lambda A_f + \mu A_g$$

voor alle $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ en $\lambda, \mu \in K$.
Zij $\beta \colon V \to K^n$ en $\gamma \colon W \to K^m$ de coördinatenisomorfismen ten opzichte van de gekozen basissen. In Opmerking 5.1.5(ii) hebben we vastgesteld dat $\gamma((\lambda f + \mu g)(v)) = A_{\lambda f+\mu g}\beta(v)$ voor alle $v \in V$. Anderzijds geldt ook dat

$$\gamma((\lambda f + \mu g)(v)) = \lambda\gamma(f(v)) + \mu\gamma(g(v)) = \lambda A_f\beta(v) + \mu A_g\beta(v).$$

Uit de distributiviteit van de matrixvermenigvuldiging volgt dat

$$\lambda A_f\beta(v) + \mu A_g\beta(v) = (\lambda A_f + \mu A_g)\beta(v).$$

Bijgevolg is, voor alle $v \in V$,

$$(\lambda A_f + \mu A_g)\beta(v) = A_{\lambda f+\mu g}\beta(v),$$

en uit Lemma 5.1.7 volgt nu dat $\lambda A_f + \mu A_g = A_{\lambda f + \mu g}$.

Uit Lemma 5.1.4(i) volgt dat $f \mapsto A_f$ surjectief is. Uit het feit dat een lineaire afbeelding volledig bepaald is door zijn matrixvoorstelling t.o.v. een bepaalde basis volgt dat $f \mapsto A_f$ injectief is.

(ii) Zij $\beta\colon V \to K^n$, $\gamma\colon V \to K^m$ en $\zeta\colon U \to K^t$ de coördinatenisomorfismen ten opzichte van de gekozen basissen. In Opmerking 5.1.5(ii) hebben we vastgesteld dat $A_{g\circ f}\beta(v) = \zeta((g \circ f)(v))$ voor alle $v \in V$. Door Opmerking 5.1.5(ii) nog twee maal toe te passen vinden we dat

$$\zeta((g \circ f)(v)) = \zeta(g(f(v))) = A_g \cdot \gamma(f(v)) = A_g \cdot (A_f \cdot \beta(v)).$$

Uit de associativiteit van de matrixvermenigvuldiging volgt dat

$$A_{g\circ f}\beta(v) = (A_g A_f) \cdot \beta(v),$$

en opnieuw volgt nu uit Lemma 5.1.7 dat $A_{g\circ f} = A_g A_f$.

(iii) Het resultaat volgt uit (i) met $V = W$ en (ii) met $V = W = U$.

(iv) Veronderstel eerst dat f inverteerbaar is, en beschouw de inverse afbeelding $f^{-1} \in \mathsf{GL}_K(V)$; dan is $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathbf{1}_V$. Uit (ii) voor $V = W = U$ volgt dat

$$A_{f\circ f^{-1}} = A_f A_{f^{-1}} = A_{\mathbf{1}_V}, \quad A_{f^{-1}\circ f} = A_{f^{-1}} A_f = A_{\mathbf{1}_V}.$$

Aangezien $A_{\mathbf{1}_V} = I_n$, is $A_f A_{f^{-1}} = A_{f^{-1}} A_f = I_n$. Bijgevolg is de matrix A_f inverteerbaar; uit de uniciteit van het inverse van een matrix volgt dat $(A_f)^{-1} = A_{f^{-1}}$.

Veronderstel omgekeerd dat de matrix A_f inverteerbaar is, en stel $B := (A_f)^{-1}$. Uit Lemma 5.1.4(i) volgt dat $B = A_g$ voor een bepaalde $g \in \operatorname{End}_K(V)$. Uit $A_f B = B A_f = I_n$ volgt nu dat $A_{f\circ g} = A_{g\circ f} = A_{\mathbf{1}_V}$. Bijgevolg is $f \circ g = g \circ f = \mathbf{1}_V$, en uit Lemma 3.1.13 volgt dat f inverteerbaar is. $\square$

Opmerking 5.1.9. (i) De verzamelingen $\mathsf{GL}_K(V)$ en $\mathsf{GL}_n(K)$ zijn groepen. Stelling 5.1.8(iv) drukt uit dat de afbeelding $f \mapsto A_f$ een isomorfisme van groepen is.

(ii) De verzamelingen $\operatorname{End}_K(V)$ en $M_n(K)$ zijn beide voorbeelden van wat men K-algebras noemt. Stelling 5.1.8(iii) drukt uit dat de afbeelding $f \mapsto A_f$ een isomorfisme van K-algebras is.

Opmerking 5.1.10. Zij V een n-dimensionale vectorruimte met basis $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$. We beschouwen de duale ruimte $V^* = \operatorname{Hom}_K(V, K)$. We kiezen in de K-vectorruimte K de basis $\{1\}$. Als we Stelling 5.1.8(i) toepassen vinden we dat $f \mapsto A_f$ een isomorfisme bepaalt van V^* naar $M_{1,n}(K)$, de vectorruimte van de rijvectoren. Concreet, zij $f \in V^*$, dan is

$$A_f = (f(b_1), \ldots, f(b_n)) \in M_{1,n}(K).$$

Stel nu $V = K^n$ met als basis de standaardbasis, en zij $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ de duale basis van de standaardbasis van K^n. Zij $f \in V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$. Uit Gevolg 5.1.6 volgt dat $f = L_A$ voor $A = (f(e_i)) \in M_{1,n}(K)$; dan is dus

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t = (f(e_1), \ldots, f(e_n))(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\lambda_i \in K$$

voor alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Of anders gezegd, $f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\varepsilon_i$.

Stelling 5.1.11. *Zij V een n-dimensionale K-vectorruimte en W een m-dimensionale K-vectorruimte. Zij $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding, en zij $f^*\colon W^* \to V^*$ de corresponderende duale afbeelding tussen de duale ruimten. Als A_f de matrixvoorstelling is ten opzichte van een basis $\mathcal{B}$ in V en een basis $\mathcal{C}$ in W, dan is de getransponeerde matrix A_f^t de matrixvoorstelling van f^* ten opzichte van de duale basis van $\mathcal{C}$ en de duale basis van $\mathcal{B}$.*

Bewijs. Oefening. (Dit wordt besproken in de oefeningenlessen.) □

Men kan de vraag stellen of een lineaire afbeelding $f\colon V \to W$ "interessante" matrixvoorstellingen heeft. In het algemeen, wanneer we de basissen in het domein V en de beeldruimte W vrij kunnen kiezen, is er een eenvoudig antwoord:

Stelling 5.1.12. *Zij $f\colon V \to W$ met $n = \dim V$ en $m = \dim W$. Dan bestaat er een basis $\mathcal{B}$ van V en een basis $\mathcal{C}$ van W waarvoor*

$$A_{f,\mathcal{B},\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0_{k,n-k} \\ \hline 0_{m-k,k} & 0_{m-k,n-k} \end{array}\right) \quad \textit{voor een bepaalde } k \le n, m.$$

Bewijs. We schrijven $V = V' \oplus \ker f$, dan is V' een complement van $\ker f$. Zij $\{b_1, \ldots, b_k\}$ een basis voor V' en $\{b_{k+1}, \ldots, b_n\}$ een basis voor $\ker f$, dan is $\{b_1, \ldots, b_n\}$ een basis voor V.

Aangezien $\ker f|_{V'} = \{0\}$ en $\operatorname{im} f|_{V'} = \operatorname{im} f$, is $f|_{V'}\colon V' \to \operatorname{im} f$ een isomorfisme. Dit impliceert dat $\{f(b_1), \ldots, f(b_k)\}$ een basis is voor $\operatorname{im} f$. We breiden deze basis uit tot een basis $\{f(b_1), \ldots, f(b_k), c_{k+1}, \ldots, c_m\}$ voor W. Ten opzichte van deze basissen is de matrixvoorstelling van f van de gezochte vorm. □

Het probleem is interessanter wanneer de basissen in het domein en de beeldruimte niet onafhankelijk van elkaar gekozen worden. Dit is het geval voor operatoren $f\colon V \to V$ en voor afbeeldingen $f\colon V \to V^*$. In het eerste geval is de basis in het domein en de beeldruimte dezelfde, in het tweede geval is de basis in de beeldruimte de duale basis van deze in V. De matrixvoorstellingen van lineaire operatoren bestuderen we in hoofdstuk 6; de matrixvoorstellingen van lineaire afbeeldingen tussen V en zijn duale V^* worden voor de wiskundestudenten besproken in de cursus “Lineaire algebra en meetkunde II”.

5.2 Coördinatentransformaties

De beschrijving van elementen van een vectorruimte door hun coördinaten hangt af van de keuze van basissen. Ook de beschrijving van lineaire afbeeldingen door matrices hangt af van de keuzes van basissen. Men moet dan ook het verband onderzoeken tussen de coördinaten van een element in een vectorruimte ten opzichte van verschillende basissen, en het verband tussen matrixvoorstellingen van een lineaire afbeelding ten opzichte van verschillende basiskeuzes.

Zij V een n-dimensionale K-vectorruimte. Zij $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ en $\mathcal{B}' = \{b'_1, \ldots, b'_n\}$ twee basissen voor V; dan is ieder element van $\mathcal{B}'$ een lineaire combinatie van elementen van $\mathcal{B}$:

$$b'_j = q_{1j}b_1 + \cdots + q_{nj}b_n \, ,$$

voor bepaalde scalairen $q_{ij} \in K$.

Definitie 5.2.1. Zij $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ en $\mathcal{B}' = \{b'_1, \ldots, b'_n\}$ twee basissen voor V, en schrijf, voor elke j, $b'_j = \sum_{i=1}^n q_{ij}b_i$ voor bepaalde $q_{ij} \in K$. De matrix $Q = (q_{ij}) \in M_n(K)$ noemt men de *matrix van de basisovergang* of de *transitiematrix* van de (oude) basis $\mathcal{B}$ naar de (nieuwe) basis $\mathcal{B}'$.

Opmerking 5.2.2. (i) Zij Q de matrix van de basisovergang van de (oude) basis $\mathcal{B}$ naar de (nieuwe) basis $\mathcal{B}' = \{b'_1, \ldots, b'_n\}$. De i-de kolom van Q is de coördinatenvector van b'_i ten opzichte van de (oude) basis $\mathcal{B}$. In de praktijk stellen we de matrix Q van de basisovergang dus op door de coördinatenvectoren van $b'_1, \ldots, b'_n$ in de kolommen van Q te schrijven.

(ii) We beschouwen de vectorruimte K^n. Een vaak voorkomende situatie is deze waarbij we de transitiematrix willen bepalen van de standaardbasis naar een willekeurige basis $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Iedere $b_i \in \mathcal{B}$ is gelijk aan zijn coördinatenvector t.o.v. de standaardbasis. Bijgevolg is $P = (b_1, \ldots, b_n) \in M_n(K)$ de transitiematrix van de standaardbasis naar $\mathcal{B}$.

Lemma 5.2.3. *Zij $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ en $\mathcal{B}' = \{b'_1, \ldots, b'_n\}$ twee basissen voor V, en zij Q de matrix van de basisovergang van de (oude) basis $\mathcal{B}$ naar de (nieuwe) basis $\mathcal{B}'$.*

(i) *Kies een willekeurige basis $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_n\}$ van V, en noteer met $\gamma\colon V \to K^n$ het coördinatenisomorfisme ten opzichte van $\mathcal{C}$. Definieer de $n \times n$-matrices*

$$B = (\gamma(b_1), \ldots, \gamma(b_n)) \quad \textit{en} \quad B' = (\gamma(b'_1), \ldots, \gamma(b'_n)).$$

Dan is $BQ = B'$.

(ii) *De matrix Q is inverteerbaar. De inverse Q^{-1} is de transitiematrix van de (nieuwe) basis $\mathcal{B}'$ naar de (oude) basis $\mathcal{B}$.*

(iii) *Zij $v \in V$, zij $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t$ de coördinatenvector van $v \in V$ ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$, en zij $(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n)^t$ de coördinatenvector van v ten opzichte van de basis $\mathcal{B}'$. Dan is*

$$Q \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \textit{en} \quad \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Bewijs. (i) Dit volgt rechtstreeks uit de definitie van Q, want aangezien γ lineair is geldt dat $\gamma(b'_j) = q_{1j}\gamma(b_1) + \cdots + q_{nj}\gamma(b_n)$.

(ii) We noteren met P de matrix van de basisovergang van de (nieuwe) basis $\mathcal{B}'$ naar de (oude) basis $\mathcal{B}$.
We passen nu (i) toe met $\mathcal{C} = \mathcal{B}$; dan is $B = I_n \in M_n(K)$ en $B' \in M_n(K)$. Er volgt dat $I_n Q = B'$, dus $Q = B'$.
We passen nogmaals (i) toe met $\mathcal{C} = \mathcal{B}$, maar we beschouwen de matrix P van de basisovergang van $\mathcal{B}'$ naar $\mathcal{B}$; er volgt dat $B'P = I_n$. Bijgevolg is $QP = I_n$.
Door de rol van $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$ te verwisselen, vinden we op dezelfde wijze dat ook $PQ = I_n$. Er volgt dus dat Q inverteerbaar is en dat $Q^{-1} = P$.

(iii) We hebben $v = \sum_{k=1}^n \lambda'_k b'_k$, en uit de definitie van de transitiematrix Q volgt dat

$$v = \sum_{k=1}^n \lambda'_k \Big(\sum_{i=1}^n q_{ik} b_i \Big) = \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{k=1}^n \lambda'_k q_{ik} \Big) b_i.$$

Anderzijds geldt ook dat $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$. Echter, ieder element is op een unieke manier te schrijven is als een lineaire combinatie van de basiselementen, en dus volgt hieruit dat $\lambda_i = \sum_k q_{ik} \lambda'_k$ voor alle i. $\square$

Opmerking 5.2.4. Zij $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ en $\mathcal{B}' = \{b'_1, \dots, b'_n\}$ twee basissen voor V, en zij Q de matrix van de basisovergang van (oude) basis $\mathcal{B}$ naar (nieuwe) $\mathcal{B}'$.

(i) We kunnen de formule in Lemma 5.2.3(i) ook symbolisch opschrijven als
$$(b_1, \dots, b_n)Q = (b'_1, \dots, b'_n), \tag{5.1}$$
waarbij $(b_1, \dots, b_n)$ een $1 \times n$-matrix is waarvan de elementen zelf vectoren zijn. Op deze manier kunnen we de symbolische matrixvermenigvuldiging uitvoeren; uit de definitie van Q volgt dat de formule klopt.

(ii) Beschouw de coördinatenisomorfismen $\beta \colon V \to K^n$ ten opzichte van $\mathcal{B}$ en $\beta' \colon V \to K^n$ ten opzichte van $\mathcal{B}'$. Uit Lemma 5.2.3(iii) volgt dat $Q\beta'(v) = \beta(v)$ voor alle $v \in V$. Bijgevolg is $L_Q \circ \beta' = \beta$; we geven dit schematisch weer door middel van het volgend commutatief diagram:
$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\beta'"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ K^n \arrow[rr, "L_Q"] & & K^n \end{tikzcd}$$

Zij $f \colon V \to W$ een lineaire afbeelding tussen twee eindig-dimensionale vectorruimten. We willen de matrixvoorstellingen van f ten opzichte van verschillende basiskeuzes vergelijken.

Stelling 5.2.5. *Zij V, W eindig-dimensionale K-vectorruimten met $n = \dim V$ en $m = \dim W$ en kies basissen $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ voor V en basissen $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ voor W. Beschouw de transitiematrix $Q \in \mathsf{GL}_n(K)$ van $\mathcal{B}$ naar $\mathcal{B}'$ en de transitiematrix $P \in \mathsf{GL}_m(K)$ van $\mathcal{C}$ naar $\mathcal{C}'$. Stel $A = A_{f,\mathcal{B},\mathcal{C}}$ en $A' = A_{f,\mathcal{B}',\mathcal{C}'}$; dan is*
$$A' = P^{-1}AQ.$$

Bewijs. Zij $\beta, \beta' \colon V \to K^n$ de coördinatenisomorfismen t.o.v. de basissen $\mathcal{B}$ resp. $\mathcal{B}'$, en zij $\gamma, \gamma' \colon W \to K^m$ de coördinatenisomorfismen t.o.v. de basissen $\mathcal{C}$ resp. $\mathcal{C}'$.

Uit Opmerking 5.2.4(ii) volgt dat $Q\beta'(v) = \beta(v)$ voor alle $v \in V$ en dat $P\gamma'(w) = \gamma(w)$ voor alle $w \in W$. Uit Opmerking 5.1.5(ii) volgt dat $A\beta(v) = \gamma(f(v))$ en $A'\beta'(v) = \gamma'(f(v))$ voor alle $v \in V$. Uit $A\beta(v) = \gamma(f(v))$ volgt wegens de associativiteit van de matrixvermenigvuldiging dat
$$AQ\beta'(v) = P\gamma'(f(v)), \quad \text{en dus} \quad (P^{-1}AQ)\beta'(v) = \gamma'(f(v)).$$
Bijgevolg is $(P^{-1}AQ)\beta'(v) = A'\beta'(v)$ voor alle $v \in V$, en uit Lemma 5.1.7 volgt dat $A' = P^{-1}AQ$. $\square$

We kunnen deze formule ook inzien door het volgend commutatief diagram te bekijken:

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "\beta'"'] \arrow[d, "\beta"] \arrow[rr, "f"] & & W \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, "\gamma'"] & \\
K^n \arrow[r, "L_Q"] & K^n \arrow[r, "L_A"] & K^m \arrow[r, "L_{P^{-1}}"] & K^m
\end{tikzcd}$$

Opmerking 5.2.6. Zij $f \in \mathrm{End}(V)$, en zij Q de transitiematrix van de basis $\mathcal{B}$ naar de basis $\mathcal{B}'$. Dan krijgt de formule in Stelling 5.2.5 de gedaante $A' = Q^{-1}AQ$.

Definitie 5.2.7. Zij $A \in M_n(K)$. De verzameling

$$\{Q^{-1}AQ \mid Q \in \mathsf{GL}_n(K)\}$$

noemt men de *conjugatieklasse* van A; de elementen van deze verzameling zijn de *geconjugeerden* of *toegevoegden* van A.

Als A een matrixvoorstelling is van een lineaire operator f op een n-dimensionale K-vectorruimte V, dan bestaat een conjugatieklasse van A juist uit alle mogelijke matrixvoorstellingen van f.

We sluiten deze paragraaf af met een observatie over de transitiematrix tussen twee orthonormale basissen in een inproduct-ruimte.

Stelling 5.2.8. *Beschouw een inproduct-ruimte* $(V, \langle ., . \rangle)$ *over* $K = \mathbb{R}$ *of* $\mathbb{C}$. *Zij* $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ *en* $\mathcal{B}' = \{b'_1, \ldots, b'_n\}$ *twee orthonormale basissen van* V, *en zij* Q *de transitiematrix van* $\mathcal{B}$ *naar* $\mathcal{B}'$. *Dan is* $Q^t\overline{Q} = I_n$.

Bewijs. We moeten aantonen dat $Q^t\overline{Q} = I_n$, of dus dat $\sum_k q_{ki}\overline{q}_{kj} = \delta_{ij}$ voor alle $i, j = 1 \ldots, n$. Er geldt dat $b'_i = \sum_k q_{ki}b_k$, en aangezien de basissen orthonormaal zijn is $\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$ en $\langle b'_i, b'_j \rangle = \delta_{ij}$, voor alle i, j. We vinden dat

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} = \langle b'_i, b'_j \rangle &= \left\langle \sum_k q_{ki}b_k, \sum_\ell q_{\ell j}b_\ell \right\rangle \\
&= \sum_k \sum_\ell q_{ki}\overline{q}_{\ell j} \langle b_k, b_\ell \rangle \\
&= \sum_k q_{ki}\overline{q}_{kj}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Voor inproduct-ruimten over $\mathbb{R}$ hebben we dus dat de transitiematrix tussen twee orthonormale basissen voldoet aan $Q^tQ = I_n$. Een dergelijke matrix noemt men een *orthogonale matrix.* Voor inproduct-ruimten over $\mathbb{C}$ zijn deze transitiematrices precies de *unitaire matrices.* Zie ook Definitie 5.5.6 verderop.

5.3 Determinanten

In deze sectie introduceren we een belangrijke afbeelding op $M_n(K)$ met waarden in K, namelijk de *determinantafbeelding* (of kortweg de *determinant*). De determinantafbeelding op $M_n(K)$ wordt volledig bepaald door zijn eigenschappen; één van die eigenschappen is de multilineariteit in de kolommen, een andere is de eis dat de determinant gelijk is aan nul als de kolommen van de matrix lineair afhankelijk zijn. Deze twee eigenschappen bepalen de determinant nog niet volledig, ze bepalen de determinant op een veelvoud na. We zullen aantonen dat er een unieke afbeelding

$$D\colon M_n(K) \to K$$

bestaat die voldoet aan de volgende drie eigenschappen, waarbij we voor elke matrix $A \in M_n(K)$ de notatie $A = (A_1, \ldots, A_n)$ gebruiken, met $A_1, \ldots, A_n$ de kolommen van A.

($\mathbf{D_1}$) D is *multilineair* in de kolommen van de matrices, i.e.

$$\begin{aligned} D(A_1, \ldots, \lambda A_i + \mu A_i', \ldots, A_n) = \lambda D(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n) \\ + \mu D(A_1, \ldots, A_i', \ldots, A_n) \end{aligned}$$

voor alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, alle $\lambda, \mu \in K$, en alle $A_i, A_i' \in M_{n,1}(K)$;

($\mathbf{D_2}$) als de matrix $A \in M_n(K)$ twee opeenvolgende gelijke kolommen heeft, dan is $D(A) = 0$;

($\mathbf{D_3}$) $D(I_n) = 1$.

In de loop van het bewijs zullen we de verzameling van permutaties van $\{1, \ldots, n\}$ nodig hebben.

Definitie 5.3.1. Zij $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(i) Een *permutatie* van $\{1, \ldots, n\}$ is een bijectie $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. De verzameling van alle permutaties van $\{1, \ldots, n\}$ noteren we als $\mathrm{Sym}(n)$ of S_n.

(ii) We stellen een permutatie σ vaak voor door de opeenvolgende beelden $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ tussen haakjes te plaatsen; we noteren dus $\sigma = (i_1, \dots, i_n)$ waarbij $i_k = \sigma(k)$.

(iii) Zij $\sigma = (i_1, \dots, i_n)$ een willekeurige permutatie. We kunnen steeds $(i_1, \dots, i_n)$ omvormen in $(1, \dots, n)$ door een aantal keer na elkaar twee elementen van plaats te verwisselen. Als dit mogelijk is in k stappen, dan definiëren we het *teken van de permutatie* σ als $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^k$; het teken is dus steeds 1 of -1.

Opmerking 5.3.2. (i) Het is mogelijk om op een heel aantal verschillende manieren $(i_1, \dots, i_n)$ om te vormen in $(1, \dots, n)$ door een aantal keer twee elementen van plaats te verwisselen. Men kan aantonen dat het echter niet mogelijk is om dit enerzijds te doen in een even aantal stappen en anderzijds in een oneven aantal stappen. Hieruit volgt dat de pariteit van een permutatie goed gedefinieerd is.

(ii) Als σ een permutatie is van $\{1, \dots, n\}$, dan is ook de inverse afbeelding σ^{-1} een permutatie van diezelfde verzameling. Bovendien is $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$, want als σ bekomen wordt door k keer na elkaar twee elementen van plaats te verwisselen, dan wordt σ^{-1} bekomen door diezelfde k verwisselingen uit te voeren in de omgekeerde volgorde.

We bekijken de verzameling S_n voor kleine waarden van n.

Voorbeeld 5.3.3. (1) Zij $n = 2$. Dan zijn er juist twee permutaties van de verzameling $A = \{1, 2\}$, met name

$$\sigma_1 \colon A \to A \colon \begin{cases} 1 & \mapsto 1 \\ 2 & \mapsto 2\,, \end{cases}$$

en

$$\sigma_2 \colon A \to A \colon \begin{cases} 1 & \mapsto 2 \\ 2 & \mapsto 1\,. \end{cases}$$

We noteren $\sigma_1 = (1, 2)$ en $\sigma_2 = (2, 1)$, het is duidelijk dat $\mathrm{sgn}(\sigma_1) = (-1)^0 = 1$ en $\mathrm{sgn}(\sigma_1) = (-1)^1 = -1$.

(2) Zij $n = 3$. Dan zijn er juist zes permutaties van de verzameling $A = \{1, 2, 3\}$, met name

$$(1, 2, 3),\ (1, 3, 2),\ (2, 1, 3),\ (2, 3, 1),\ (3, 1, 2),\ (3, 2, 1)\,.$$

Het is duidelijk dat $\mathrm{sgn}(1, 2, 3) = 1$ en dat $\mathrm{sgn}(1, 3, 2) = \mathrm{sgn}(2, 1, 3) = \mathrm{sgn}(3, 2, 1) = (-1)^1 = -1$. We bepalen $\mathrm{sgn}(2, 3, 1)$:

$$(2, 3, 1) \to (2, 1, 3) \to (1, 2, 3),$$

er geldt dus dat $\operatorname{sgn}(2,3,1) = (-1)^2 = 1$. Analoog is $\operatorname{sgn}(3,1,2) = 1$.

Merk op dat $|S_n| = n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ voor alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Men kan aantonen dat S_n een groep is, met als bewerking de samenstelling van permutaties; de groep S_n is niet-abels zodra $n \geq 3$.

We tonen aan dat er ten hoogste één afbeelding kan bestaan die aan de eigenschappen $(\mathbf{D_1})$–$(\mathbf{D_3})$ voldoet.

Stelling 5.3.4. *Zij $D\colon M_n(K) \to K$ een afbeelding die voldoet aan de eigenschappen $(\mathbf{D_1})$–$(\mathbf{D_3})$.*

(i) *Als $A \in M_n(K)$ twee gelijke kolommen heeft, dan is $D(A) = 0$.*

(ii) *Stel $A = (A_1, \dots, A_n) \in M_n(K)$, en zij $\sigma = (i_1, \dots, i_n)$ een permutatie van $\{1, \dots, n\}$. Dan is*

$$D(A_{i_1}, \dots, A_{i_n}) = \operatorname{sgn}(\sigma) D(A).$$

(iii) *Voor elke matrix $A \in M_n(K)$ geldt*

$$D(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \,. \tag{5.2}$$

(iv) *Voor alle $A, B \in M_n(K)$ geldt dat $D(AB) = D(A)D(B)$.*

In het bijzonder toont de formule (5.2) aan dat er ten hoogste één afbeelding D kan bestaan die aan de eigenschappen $(\mathbf{D_1})$–$(\mathbf{D_3})$ voldoet.

Bewijs. We leiden stap voor stap een aantal eigenschappen af uit de eigenschappen $(\mathbf{D_1})$–$(\mathbf{D_3})$. Zij $A = (A_1, \dots, A_n) = (a_{ij}) \in M_n(K)$.

(1) Uit $(\mathbf{D_2})$ volgt dat $D(A_1, \dots, A_k + A_{k+1}, A_k + A_{k+1}, \dots, A_n) = 0$; door nu $(\mathbf{D_1})$ toe te passen op het linkerlid van deze gelijkheid krijgen we

$$D(A_1, \dots, A_k, A_{k+1}, \dots, A_n) = -D(A_1, \dots, A_{k+1}, A_k, \dots, A_n).$$

Dus D verandert van teken als twee opeenvolgende kolommen verwisseld worden.

(2) Als $A_i = A_j$ voor een $i \neq j$, dan is $D(A) = 0$: dit volgt uit het voorgaande door kolommen te verwisselen tot de twee gelijke kolommen naast elkaar staan. Dit toont reeds (i) aan.

(3) Uit het voorgaande punt volgt met een analoog argument als in punt (1) dat $D(A)$ van teken verandert als we twee willekeurige kolommen verwisselen.

(4) Zij $\sigma = (i_1, \dots, i_n)$ een permutatie van $(1, \dots, n)$. Dan is

$$D(A_{i_1}, \dots, A_{i_n}) = \pm D(A_1, \dots, A_n)\,.$$

Door opeenvolgende verwisselingen van kolommen kan men $(A_{i_1}, \dots, A_{i_n})$ omvormen in $(A_1, \dots, A_n)$. Bij elke verwisseling verandert het teken. Deze verwisselingen zijn precies dezelfde verwisselingen als degene die we nodig hebben om $(i_1, \dots, i_n)$ om te vormen in $(1, \dots, n)$. Uit de definitie van $\operatorname{sgn}(\sigma)$ volgt dat dit teken gelijk is aan $\operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_n)$. We vinden dus dat

$$D(A_{i_1}, \dots, A_{i_n}) = \operatorname{sgn}(\sigma) D(A) \quad \text{met } \sigma = (i_1, \dots, i_n);$$

dit bewijst (ii).

(5) Stel $B = (b_{ij})$. Dan is $C := AB \in M_n(K)$ een matrix waarbij $C = (C_1, \dots, C_n)$ is, met $C_k = b_{1k}A_1 + \cdots + b_{nk}A_n$. Eigenschap $(\mathbf{D_1})$ geeft dat

$$D(C_1, \dots, C_n) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} b_{i_1,1} b_{i_2,2} \cdots b_{i_n,n} D(A_{i_1}, \dots, A_{i_n})\,,$$

waarbij de i_j onafhankelijk van elkaar lopen van 1 tot n. Als $i_k = i_\ell$, dan bevat de matrix $(A_{i_1}, \dots, A_{i_n})$ twee gelijke kolommen en is dus $D(A_{i_1}, \dots, A_{i_n}) = 0$. In de som komen dus enkel de termen voor met $\sigma = (i_1, \dots, i_n)$ een permutatie van $\{1, \dots, n\}$. Wanneer we (ii) toepassen, bekomen we

$$D(C_1, \dots, C_n) = D(A_1, \dots, A_n) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(n),n}\,,$$

waarbij σ loopt door de verzameling S_n van alle permutaties van $\{1, \dots, n\}$.

(6) Nemen we in (5) nu $A = I_n$, dan volgt uit $(\mathbf{D}_3)$ dat $D(A) = 1$ en vinden we met $C = AB = B$ dat

$$D(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(n),n}\,,$$

en dit bewijst de expliciete formule in (iii).

(7) Uit (5) en (6) volgt dat voor $C = AB$ geldt dat $D(C) = D(A)D(B)$, en dit bewijst (iv). $\square$

Definitie 5.3.5. Met det noteren we de afbeelding van $M_n(K)$ naar K gegeven door formule (5.2), i.e.

$$\det\colon M_n(K) \to K\colon A \mapsto \det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}\,;$$

we noemen deze afbeelding de *determinantafbeelding* of kortweg de *determinant*. De scalair $\det A := \det(A) \in K$ noemen we dan de *determinant* van de matrix $A \in M_n(K)$.

Opmerking 5.3.6. We hebben op dit moment nog niet bewezen dat deze afbeelding det voldoet aan de eigenschappen $(\mathbf{D_1})$–$(\mathbf{D_3})$. We zouden dit nu rechtstreeks kunnen aantonen (en het is een interessante oefening om dit te doen), maar in plaats daarvan zullen we straks een andere constructie geven van de determinant, waaruit we dan zullen kunnen afleiden dat det inderdaad voldoet aan $(\mathbf{D_1})$–$(\mathbf{D_3})$. Zie Constructie 5.3.8 verderop.

Voor we verder gaan geven we wat toelichting bij de definitie van de determinant.

Voorbeeld 5.3.7. Als voorbeeld berekenen we wat de determinant van een willekeurige 2×2-matrix en 3×3-matrix is.

(1) Zij $A = (a_{ij}) \in M_2(K)$. Uit Voorbeeld 5.3.3 weten we dat $S_2 = \{(1,2),(2,1)\}$ met $\operatorname{sgn}(1,2) = 1$ en $\operatorname{sgn}(2,1) = -1$. Bijgevolg is

$$\det A = \sum_{\sigma \in \{(12),(21)\}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

(2) Zij $A = (a_{ij}) \in M_3(K)$. Uit Voorbeeld 5.3.3 weten we dat

$$S_3 = \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2),(1,3,2),(3,2,1),(2,1,3)\}$$

met

$$\begin{aligned} &\operatorname{sgn}(1,2,3) = \operatorname{sgn}(2,3,1) = \operatorname{sgn}(3,1,2) = 1 \quad \text{en} \\ &\operatorname{sgn}(1,3,2) = \operatorname{sgn}(3,2,1) = \operatorname{sgn}(2,1,3) = -1. \end{aligned}$$

Er volgt dat

$$\begin{aligned} \det A = \sum_{\sigma \in S_3} &\operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ &\qquad - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33}. \end{aligned}$$

Deze formule voor de determinant van een 3×3-matrix wordt ook wel de *regel van Sarrus* genoemd.

In de praktijk zullen we zelden gebruik maken van formule (5.2). Een gebruiksvriendelijkere methode om de determinant van een matrix te bepalen is de matrix te ontwikkelen naar een rij of naar een kolom. In de onderstaande constructie construeren we een afbeelding $D\colon M_n(K) \to K$; we zullen verifiëren dat deze afbeelding voldoet aan $(\mathbf{D_1})$–$(\mathbf{D_3})$.

Constructie 5.3.8. We construeren de afbeelding $D\colon M_n(K) \to K$ recursief. We definiëren D voor $M_1(K) = K$, nemen aan dat D geconstrueerd is voor $M_{n-1}(K)$ en geven een formule om D op $M_n(K)$ te bepalen in functie van D voor matrices in $M_{n-1}(K)$.

- Voor 1×1-matrices is $D(a) := a$.
- We definiëren de $(n-1) \times (n-1)$-matrix A_{ij} als de matrix bekomen door in A de i-de rij en de j-de kolom te schrappen:

$$A_{ij} := \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \hline a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array}\right)$$

- We nemen aan dat D gedefinieerd is voor $(n-1) \times (n-1)$ matrices; dan definiëren we, voor een vast gekozen $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$D(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ki} D(A_{ki}). \tag{5.3}$$

  We zeggen dat we *ontwikkelen* naar de k-de rij.

Lemma 5.3.9. *Voor iedere $k \in \{1, \dots, n\}$ is de afbeelding $D\colon M_n(K) \to K$ gedefinieerd in Constructie* 5.3.8 *gelijk aan de determinantafbeelding. We kunnen dus de determinant van een matrix A bepalen door te ontwikkelen naar de k-de rij, i.e.*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ki} \det(A_{ki}).$$

Bewijs. We bewijzen per inductie op n dat D voldoet aan $(\mathbf{D_1})$, $(\mathbf{D_2})$ en $(\mathbf{D_3})$. Het is duidelijk dat dit geldt voor $n = 1$. We veronderstellen dus dat $(\mathbf{D_1})$, $(\mathbf{D_2})$ en $(\mathbf{D_3})$ gelden voor iedere matrix in $M_{n-1}(K)$ en tonen aan dat dit ook zo is voor $M_n(K)$.

(1) We tonen aan dat $D(A)$ lineair afhangt van de ℓ-de kolom, voor elke ℓ, i.e.

$$D(\overbrace{A_1, \ldots, \lambda A_\ell + \mu A'_\ell, \ldots, A_n}^{C})$$
$$= \lambda D(\underbrace{A_1, \ldots, A_\ell, \ldots, A_n}_{B}) + \mu D(\underbrace{A_1, \ldots, A'_\ell, \ldots, A_n}_{B'}).$$

Stel $C = (c_{ij})$, $B = (b_{ij})$ en $B' = (b'_{ij})$. Zij nu $j \in \{1, \ldots, n\}$. Als $j \neq \ell$, dan is wegens de inductiehypothese

$$D(C_{kj}) = \lambda D(B_{kj}) + \mu D(B'_{kj}),$$

terwijl $c_{kj} = b_{kj} = b'_{kj}$. Voor $j = \ell$ is $C_{k\ell} = B_{k\ell} = B'_{k\ell}$, terwijl de coëfficiënt $c_{k\ell}$ gelijk is aan

$$c_{k\ell} = \lambda b_{k\ell} + \mu b'_{k\ell}.$$

Bijgevolg is

$$c_{kj} D(C_{kj}) = \lambda b_{kj} D(B_{kj}) + \mu b'_{kj} D(B'_{kj})$$

voor elke $j \in \{1, \ldots, n\}$; uit de formule (5.3) volgt nu dat de afbeelding D lineair is in de kolommen.

(2) Onderstel dat twee opeenvolgende kolommen van A gelijk zijn, $A_\ell = A_{\ell+1}$. Voor $j \neq \ell, \ell+1$ hebben de matrices A_{kj} twee gelijke kolommen, dus is, wegens de inductiehypothese, $D(A_{kj})$ gelijk aan 0. De matrices $A_{k,\ell}$ en $A_{k,\ell+1}$ zijn gelijk, dus zijn ook $D(A_{k,\ell}) = D(A_{k,\ell+1})$. In de ontwikkeling naar de k-de rij komen $D(A_{k,\ell})$ en $D(A_{k,\ell+1})$ voor met tegengesteld teken. Deze feiten samen tonen aan dat $D(A) = 0$.

(3) Als $A = I_n$ dan is $a_{kj} = 0$ voor alle $j \neq k$, dus $D(A) = a_{kk} D(A_{kk})$. We hebben $a_{kk} = 1$, en wegens de inductiehypothese is ook $D(A_{kk}) = D(I_{n-1}) = 1$, dus $D(A) = 1$.

Dit toont aan dat D voldoet aan $(\mathbf{D_1})$, $(\mathbf{D_2})$ en $(\mathbf{D_3})$. Uit Stelling 5.3.4(iii) volgt nu dat $D(A) = \det(A)$ voor alle $A \in M_n(K)$. □

Definitie 5.3.10. (i) De (i, j)-de *minor* van A is gedefinieerd als $\det(A_{ij})$, waar $A_{ij} \in M_{n-1}(K)$ de matrix is bekomen door in A de i-de rij en de j-de kolom te schrappen. De (i, j)-de minor met zijn teken $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ noemt men de *cofactor* van het element a_{ij}.

(ii) We definiëren de *adjunct* van een matrix $A \in M_n(K)$ als

$$\operatorname{adj}(A) := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

of dus $\operatorname{adj}(A) = (\alpha_{ij})^t$. (Bemerk het transponeren.)

De determinant heeft de volgende eigenschappen die we hier nog even verzamelen; de meeste van deze eigenschappen hebben we al eerder ontmoet. In de oefeningen kunnen deze het rekenwerk heel wat vereenvoudigen.

Lemma 5.3.11. *Zij $A, B \in M_n(K)$ twee willekeurige $n \times n$-matrices. Noteer de kolommen van A als $A_1, \dots, A_n$. Dan geldt:*

(i) $\det A^t = \det A$.

(ii) $\det(AB) = \det A \cdot \det B = \det(BA)$.

(iii) $$\det(A_1, \dots, \lambda A_i + \mu A_i', \dots, A_n) = \lambda \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n) + \mu \det(A_1, \dots, A_i', \dots, A_n)$$

voor alle $i \in \{1, \dots, n\}$, alle $\lambda, \mu \in K$, en alle $A_i, A_i' \in M_{n,1}(K)$.

(iv) $\det(A_{i_1}, \dots, A_{i_n}) = \operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_n) \det(A_1, \dots, A_n)$

(v) *Als twee willekeurige kolommen van A gelijk zijn is* $\det A = 0$.

(vi) $\det(A_1, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A_i + \lambda A_k, \dots, A_n)$ *voor alle $\lambda \in K$ en alle $k \neq i$.*

(vii) *We kunnen de determinant van een matrix A bepalen door te ontwikkelen naar de k-de kolom, i.e.*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}).$$

De eigenschappen (iii)–(vi) *zijn ook geldig voor rijen in plaats van kolommen.*

Bewijs. Stel $C = (c_{ij}) = A^t$; dan is

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) c_{1,\sigma(1)} \cdots c_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) c_{\sigma^{-1}(1),1} \cdots c_{\sigma^{-1}(n),n} = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau^{-1}) c_{\tau(1),1} \cdots c_{\tau(n),n} \\
&= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) c_{\tau(1),1} \cdots c_{\tau(n),n} = \det A^t,
\end{aligned}$$

waarbij we gebruik gemaakt hebben van Opmerking 5.3.2(ii). Dit bewijst (i). Eigenschap (iii) is precies eigenschap ($\mathbf{D_1}$). Eigenschappen (ii), (iv) en (v) zijn reeds vermeld in Stelling 5.3.4. Eigenschap (vi) volgt uit eigenschappen (iii) en (v). Uit het feit dat $\det A = \det A^t$ volgt ten slotte dat deze eigenschappen ook geldig zijn wanneer men rijen in plaats van kolommen beschouwt. $\square$

Met behulp van de determinant kunnen we enkele karakterisaties van inverteerbare matrices bewijzen.

Stelling 5.3.12. *Zij $A \in M_n(K)$; dan zijn de volgende eigenschappen equivalent:*

(a) $\det A \neq 0$;

(b) $\operatorname{rk} A = n$;

(c) $A \in \mathsf{GL}_n(K)$.

Bewijs. We zullen aantonen dat (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a).

Zij $A = (A_1, \dots, A_n)$, we tonen (a) $\Rightarrow$ (b) aan uit het ongerijmde. Als $\operatorname{rk}(A) \neq n$, dan zijn de kolommen van A lineair afhankelijk. Er is dus een eerste kolom, stel A_k, die een lineaire combinatie is van de voorgaande kolommen. Dus $A_k = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_{k-1} A_{k-1}$. Vervangen we A_k door deze lineaire combinatie, dan vinden we

$$\begin{aligned} \det A = \lambda_1 \det(A_1, \dots, A_{k-1}, A_1, A_{k+1}, \dots, A_n) + \cdots \\ + \lambda_{k-1} \det(A_1, \dots, A_{k-1}, A_{k-1}, A_{k+1}, \dots, A_n) = 0\,; \end{aligned}$$

de matrices in elke term hebben immers twee gelijke kolommen. Uit (a) volgt dus (b).

Als $\operatorname{rk} A = n$, dan zijn de kolommen van A lineair onafhankelijk en vormen ze een basis voor de kolommenruimte K^n. De standaardbasisvectoren $e_1, \dots e_n$ zijn dus lineaire combinaties van de kolommen van A. Dus

$$I_n = \left(\sum b_{i1} A_i, \dots, \sum b_{in} A_i\right) = AB\,.$$

Ook is $\operatorname{rk} A^t = n$, zodat om dezelfde reden een matrix C bestaat zodat $I_n = A^t C$, of dus $I_n = C^t A$. Hieruit volgt dan dat

$$C^t = C^t I_n = C^t(AB) = (C^t A)B = I_n B = B,$$

en dus is zowel $AB = I_n$ als $BA = I_n$. We besluiten dat A inverteerbaar is (met inverse B); uit (b) volgt dus (c).

Veronderstel nu dat (c) geldt; dan is

$$1 = \det I_n = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}\,,$$

waaruit volgt dat $\det A \neq 0$. Dus (c) impliceert (a). □

We vinden nu ook een expliciete formule om het inverse van een matrix te berekenen.

Stelling 5.3.13. (i) *Voor alle* $A \in M_n(K)$ *is* $A\,\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A)A = (\det A)I_n$.

(ii) *Voor alle* $A \in \mathsf{GL}_n(K)$ *is* $A^{-1} = (\det A)^{-1}\,\mathrm{adj}(A)$.

Bewijs. (i) Het i-de diagonaalelement van $A\,\mathrm{adj}(A)$ is gelijk aan

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \vdots \\ \alpha_{in} \end{pmatrix} = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}\,;$$

dit is de ontwikkeling van A naar de i-de rij en is dus gelijk aan $\det A$. Analoog vinden we dat het i-de diagonaal element van $\mathrm{adj}(A)A$ gelijk is aan de ontwikkeling van A naar de i-de kolom, dus ook gelijk is aan $\det A$.

We bekijken vervolgens de niet-diagonaal elementen van $A\,\mathrm{adj}(A)$ en $\mathrm{adj}(A)A$. Stel dus $j \neq k$, en beschouw het (j,k)-de element van $A\,\mathrm{adj}(A)$. Definieer de matrix $\tilde{A}$ bekomen uit A door de k-de rij van A te vervangen door de j-de rij van A. De matrix $\tilde{A}$ heeft twee gelijke rijen en $\det \tilde{A}$ is dus gelijk aan nul. Dit impliceert dat de ontwikkeling naar de k-de rij

$$(-1)^{k+1} \tilde{a}_{k1} \det \tilde{A}_{k1} + \cdots + (-1)^{k+n} \tilde{a}_{kn} \det \tilde{A}_{kn} = 0\,.$$

Nu is $\tilde{a}_{ki} = a_{ji}$ en $\det \tilde{A}_{ki} = \det A_{ki}$ voor alle $i = 1, \ldots, n$, en dus

$$(A\,\mathrm{adj}(A))_{jk} = (-1)^{k+1} a_{j1} \det A_{k1} + \cdots + (-1)^{k+n} a_{jn} \det A_{kn} = 0\,.$$

Analoog toont men dat $(\mathrm{adj}(A)A)_{jk} = 0$ als $k \neq j$.

(ii) Als $A \in \mathsf{GL}_n(K)$, dan impliceert Stelling 5.3.12 dat $\det A \neq 0$, en uit (i) vinden we dat

$$A^{-1} = (\det A)^{-1}\,\mathrm{adj}(A)\,.$$

□

We geven nog een ander gevolg mee van Stelling 5.3.12.

Definitie 5.3.14. Zij $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$, en zij $k \leq \min\{m,n\}$. Een $k \times k$-*minor* van A is de determinant van een $k \times k$-deelmatrix die we verkrijgen door het schrappen van $m-k$ rijen en $n-k$ kolommen uit A.

Gevolg 5.3.15. *Zij* $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$, *en* $k \leq \min\{m,n\}$. *Dan is* $\mathrm{rk}(A) \geq k$ *als en slechts als er een* $k \times k$*-minor van* A *is die verschillend is van* 0.

Bewijs. Veronderstel eerst dat $\mathrm{rk}(A) < k$. Dan vormen elke k rijen van A een lineair afhankelijke verzameling. In het bijzonder heeft elke $k \times k$-deelmatrix k afhankelijke rijen, en dus heeft een dergelijke deelmatrix rang kleiner dan k. Uit Stelling 5.3.12 volgt nu onmiddellijk dat elke $k \times k$-minor gelijk is aan 0.

Veronderstel nu dat $\mathrm{rk}(A) \geq k$. Kies k rijen $R_1, \dots, R_k$ uit A zodat de $k \times n$-matrix B gevormd door de rijen $R_1, \dots, R_k$ rang k heeft. Omdat B nu ook kolomrang k heeft (zie Stelling 2.5.2), kunnen we in B nu ook k kolommen $C_1, \dots, C_k$ vinden zodat de matrix C gevormd door de kolommen $C_1, \dots, C_k$ rang k heeft. Nu is C een $k \times k$-matrix met rang k, en opnieuw uit Stelling 5.3.12 besluiten we dat $\det C$ een $k \times k$-minor is verschillend van 0. $\square$

5.4 De karakteristieke veelterm van een lineaire operator

We willen onze voorgaande studie van determinanten van matrices nu toepassen op de studie van lineaire operatoren. Een belangrijke eerste vaststelling is dat het zinvol is om te spreken van de determinant van een lineaire operator, zoals we nu nagaan.

Lemma 5.4.1. *Zij V een eindig-dimensionale K-vectorruimte en $f \in \mathrm{End}(V)$. Beschouw twee matrixvoorstellingen A en B van f ten opzichte van verschillende basissen van V. Dan is $\det A = \det B$.*

Bewijs. Uit Stelling 5.2.5 weten we dat B toegevoegd is aan A, m.a.w. er bestaat een $P \in \mathsf{GL}_n(K)$ zodat $B = P^{-1}AP$. Uit Lemma 5.3.11 volgt dan dat

$$\begin{aligned}\det B &= \det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \cdot \det A \cdot \det P \\ &= \det A \cdot \det P^{-1} \cdot \det P = \det A \cdot \det(P^{-1}P) = \det A\,.\end{aligned}$$ $\square$

Bijgevolg kunnen we de *determinant van een lineaire operator* als volgt definiëren:

Definitie 5.4.2. Zij V een eindig-dimensionale K-vectorruimte, en zij $f \in \mathrm{End}(V)$. Dan definiëren we $\det f := \det A$ waarbij A een matrixvoorstelling van f t.o.v. een willekeurige basis is.

Tot nog toe hebben we enkel matrices over een veld K beschouwd. We kunnen echter ook matrices beschouwen waarvan de elementen veeltermen in $K[x]$ zijn. In Lemma 1.2.2 hebben we aangetoond dat de verzameling $K[x]$ een commutatieve ring is.

Definitie 5.4.3. Zij K een willekeurig veld, en zij $K[x]$ de veeltermenring over K. Dan definiëren we de verzameling van alle $m \times n$-matrices over $K[x]$ als

$$M_{m,n}(K[x]) = \big\{(p_{ij}(x)) \mid p_{ij}(x) \in K[x] \text{ voor } i = 1, \dots, m \text{ en } j = 1, \dots, n\big\}.$$

We noteren ook $M_n(K[x]) = M_{n,n}(K[x])$. We definiëren de optelling, scalaire vermenigvuldiging en vermenigvuldiging van matrices over $K[x]$ net zoals in Definitie 1.3.4 (waar we K vervangen door $K[x]$).

Het is een gemakkelijke oefening om na te gaan dat alle eigenschappen voor matrices over K opgesomd in Lemma 1.3.6 ook gelden voor matrices over $K[x]$. In het bijzonder is $M_n(K[x])$ een ring. Men moet voorzichtig zijn met het gebruik van latere resultaten die we bewezen hebben voor matrices over velden; deze zijn niet altijd veralgemeenbaar naar matrices over $M_n(K[x])$. In het bijzonder kan men de resultaten in verband met inverteerbaarheid van matrices over een veld K niet zomaar overnemen voor matrices over $K[x]$, aangezien elementen in $K[x]$ zelf niet inverteerbaar zijn ($K[x]$ is geen veld).

We kunnen wel nagaan dat Stelling 5.3.4, Lemma 5.3.9, Lemma 5.3.11 en Stelling 5.3.13(i) geldig blijven voor matrices over $K[x]$. De determinant van een vierkante matrix over $K[x]$ is dus uniek gedefinieerd als

$$\det\colon M_n(K[x]) \to K[x]\colon (p_{ij}(x)) \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) p_{\sigma(1),1}(x) \cdots p_{\sigma(n),n}(x).$$

We kunnen dus ook de adjunct matrix van een matrix over $K[x]$ bepalen, en er blijft gelden dat $A \operatorname{adj}(A) = \det(A) I_n$ voor alle $A \in M_n(K[x])$.

We komen nu tot het belangrijke begrip van de karakteristieke veelterm van een lineaire operator.

Lemma 5.4.4. *Zij V een eindig-dimensionale vectorruimte over een veld K, en zij $f \in \operatorname{End}_K(V)$ een lineaire operator, met matrixvoorstelling A (ten opzichte van een willekeurige basis voor V). Dan is*

$$\chi_f(x) := \det(xI_n - A) \in K[x]$$

een monische veelterm van graad n in de variabele x, en deze veelterm hangt niet af van de keuze van de basis voor V.

Bewijs. Zij A een matrixvoorstelling van f; dan is $xI_n - A$ een $n \times n$-matrix over $K[x]$. Merk op dat de variabele x enkel voorkomt op de diagonaal van de matrix $xI_n - A$. Stellen we nu $B = xI_n - A$ in de formule (5.2), dan zien we dat in elke term van deze formule één element van elke rij en elke kolom van B voorkomt, waarbij elke term van deze formule een element is van $K[x]$. Vermits x enkel voorkomt in de elementen op de diagonaal van B, is er maar één term van graad n, namelijk

$$b_{11}\cdots b_{nn} = (x - a_{11})\cdots(x - a_{nn})\,.$$

Hieruit volgt dat $\chi_f(x)$ een veelterm van graad n is en dat deze veelterm monisch is.

Zij nu A' een andere matrixvoorstelling voor f; dan is $A' = P^{-1}AP$ met $P \in \mathsf{GL}_n(K)$, en dus

$$\begin{aligned}\det(xI_n - A) &= \det(P^{-1}(xI_n - A)P)\\ &= \det(xI_n - P^{-1}AP) = \det(xI_n - A')\,. \qquad \square\end{aligned}$$

Definitie 5.4.5. (i) Zij $f\colon V \to V$ een lineaire operator op een eindig-dimensionale vectorruimte V over K. De veelterm $\chi_f(x)$ gedefinieerd in Lemma 5.4.4 noemt men de *karakteristieke veelterm* van f.

(ii) Zij $A \in M_n(K)$. De veelterm $\chi_A(x) := \det(xI_n - A) \in K[x]$ noemt men de *karakteristieke veelterm* van de matrix A. De karakteristieke veelterm van de matrix A is dus gelijk aan de karakteristieke veelterm van de lineaire operator $L_A\colon K^n \to K^n$.

(iii) Als $\chi(x)$ de karakteristieke veelterm is van een lineaire operator (resp. van een matrix), dan noemen we de vergelijking $\chi(x) = 0$ de *karakteristieke vergelijking* van de lineaire operator (resp. van de matrix).

Lemma 5.4.6. *Zij $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ met karakteristieke veelterm*

$$\chi_A(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1x + c_0.$$

Dan is $c_0 = (-1)^n \det A$ en $c_{n-1} = -\sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Bewijs. Door de gelijkheid

$$\chi_A(x) = \det(xI_n - A) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1x + c_0$$

te beschouwen voor $x = 0$ bekomen we $c_0 = \det(-A) = (-1)^n \det A$.

Om in te zien dat $c_{n-1} = -\sum_{i=1}^n a_{ii}$ stellen we opnieuw $B = xI_n - A$ in de formule (5.2). Vermits x enkel voorkomt in de elementen op de diagonaal van B, is er maar één term van graad $\geq n-1$, namelijk

$$b_{11}\cdots b_{nn} = (x - a_{11})\cdots(x - a_{nn})\,;$$

hieruit volgt dat c_{n-1} gelijk is aan de coëfficiënt bij x^{n-1} in deze uitdrukking, en dus $c_{n-1} = -(a_{11} + \cdots + a_{nn})$. $\square$

Definitie 5.4.7. De som van de diagonaalelementen van een vierkante matrix A noemt men het *spoor* van A; we noteren $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$.

Er volgt dat het spoor van geconjugeerde matrices gelijk is. Dit kan men ook inzien door na te rekenen dat voor alle $C, D \in M_n(K)$ geldt dat $\operatorname{tr}(CD) = \operatorname{tr}(DC)$.

Opmerking 5.4.8. In het algemeen is $\operatorname{tr}(CD)$ niet gelijk aan $\operatorname{tr}(C)\operatorname{tr}(D)$.

De karakteristieke veelterm is een uitermate belangrijke invariant van een lineaire operator. De stelling van Cayley–Hamilton[1] drukt uit dat een lineaire operator steeds voldoet aan zijn eigen karakteristieke vergelijking.

Stelling 5.4.9 (Stelling van Cayley–Hamilton)**.** (i) *Zij $A \in M_n(K)$ met karakteristieke veelterm $\chi_A(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \in K[x]$. Dan is*

$$\chi_A(A) = A^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i A^i = 0 \in M_n(K).$$

(ii) *Zij V een n-dimensionale vectorruimte over K, en zij $f \in \operatorname{End}(V)$ met karakteristieke veelterm $\chi_f(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \in K[x]$. Dan is*

$$\chi_f(f) = f^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i f^i = 0 \in \operatorname{End}(V),$$

de nuloperator op V. Met andere woorden, $f^n(v) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i f^i(v) = 0$ voor alle $v \in V$.

Bewijs. (i) We noteren in dit bewijs $I := I_n$. Beschouw de matrix $xI - A$ in $M_n(K[x])$, en zijn adjunctmatrix

$$\operatorname{adj}(xI - A) = (p_{ij}(x)) \in M_n(K[x]).$$

Iedere $p_{ij}(x) \in K[x]$ is een veelterm met $\deg p_{ij}(x) \leq n-1$, want de elementen van de adjunctmatrix zijn determinanten van $(n-1)\times(n-1)$-deelmatrices van $xI - A$. Bijgevolg is

$$\operatorname{adj}(xI - A) = (p_{ij}(x)) = B_{n-1}x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + \cdots + B_1 x + B_0$$

[1]Genoemd naar de Britse wiskundige Arthur Cayley (1821–1895) en de Ierse wiskundige Sir William Rowan Hamilton (1805–1865). Deze laatste is ook beroemd omwille van zijn ontdekking van de quaternionen, en de bijhorende vandalistische daad op de Broom Bridge in Dublin.

voor uniek bepaalde matrices $B_i \in M_n(K)$. Wegens de definitie van χ_A geldt nu de volgende gelijkheid van veeltermen in de variabele x met coëfficiënten in $M_n(K)$:

$$\begin{aligned}
I \cdot x^n + c_{n-1} I \cdot x^{n-1} + \cdots + c_1 I \cdot x + c_0 I \\
&= \det(xI - A) I \\
&= (xI - A)\,\mathrm{adj}(xI - A) \\
&= (xI - A)(B_{n-1}x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + \cdots + B_1 x + B_0).
\end{aligned}$$

Wanneer we nu voor elke k de coëfficiënt van x^k in linker- en rechterlid vergelijken, bekomen we

$$\begin{aligned}
I &= B_{n-1}, \\
c_i I &= B_{i-1} - AB_i \quad \text{voor alle } i = 1, \ldots, n-1, \\
c_0 I &= -AB_0.
\end{aligned}$$

We vermenigvuldigen nu elk van deze vergelijkingen met de gepaste A^i, en we bekomen

$$\begin{aligned}
A^n &= A^n B_{n-1}, \\
c_i A^i &= A^i B_{i-1} - A^{i+1} B_i \quad \text{voor alle } i = 1, \ldots, n-1, \\
c_0 I &= -AB_0.
\end{aligned}$$

Wanneer we deze $n+1$ vergelijkingen optellen bekomen we

$$A^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i A^i = A^n B_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (A^i B_{i-1} - A^{i+1} B_i) - AB_0 = 0.$$

(ii) Zij A_f een matrixvoorstelling van f ten opzichte van een willekeurige basis $\mathcal{B}$ voor V, en stel $g = \chi_f(f) = f^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i f^i \in \mathrm{End}_K(V)$. Uit Stelling 5.1.8(iii) volgt dan dat de matrixvoorstelling van g ten opzichte van $\mathcal{B}$ gegeven wordt door de matrix

$$A_g = A_{f^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i f^i} = {A_f}^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i {A_f}^i = \chi_f(A_f) \in M_n(K).$$

Omdat $\chi_{A_f} = \chi_f$ volgt nu uit (i) dat $\chi_f(A_f) = 0$, zodat $A_g = 0$, en we besluiten dat dat $g = \chi_f(f) = 0$ in $\mathrm{End}_K(V)$. □

Gevolg 5.4.10. *Zij $f \in \mathrm{End}(V)$ een lineaire operator op een eindig-dimensionale vectorruimte V. De karakteristieke veelterm $\chi_f(x)$ van f is een veelvoud van de minimaalveelterm $\mu_f(x)$.*

Bewijs. Uit de stelling van Cayley–Hamilton volgt dat voor $\chi_f(x) \in K[x]$ geldt dat $\chi_f(f) = 0$. Uit Stelling 3.2.2(v) volgt dat de minimaalveelterm een deler is van $\chi_f(x)$. $\square$

Zij nu $f \in \mathrm{End}(V)$ een lineaire operator. In Definitie 3.2.1(iv) hebben we de deelring $K[f]$ van $\mathrm{End}(V)$ ingevoerd. Als een gevolg van de stelling van Cayley–Hamilton kunnen we bewijzen dat $\dim K[f] \leq n$, een resultaat dat we hadden aangekondigd in Opmerking 3.2.4.

Gevolg 5.4.11. *Zij $f \in \mathrm{End}(V)$ een lineaire operator op een n-dimensionale vectorruimte V. Dan is $\dim K[f] \leq n$.*

Bewijs. Uit de stelling van Cayley-Hamilton volgt dat f^n een lineaire combinatie is van $\{f^{n-1}, \ldots, f, \mathbf{1}\}$. Bijgevolg is $\{f^{n-1}, \ldots, f, \mathbf{1}\}$ een voortbrengende verzameling voor $K[f]$. $\square$

5.5 Lineaire groepen

Zij K een veld. De groep $\mathsf{GL}_n(K)$ van inverteerbare $n \times n$-matrices over een veld K noemt men de *algemene lineaire groep*. *Lineaire groepen* zijn deelgroepen van de algemene lineaire groep.

Definitie 5.5.1. Een *elementaire $n \times n$-matrix* is een matrix van de vorm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & c_{ij} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & c_{ij} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

i.e. gelijk aan de eenheidsmatrix plus een veelvoud van een matrixeenheid U_{ij}, $i \neq j$. We noteren $E_{ij}(c)$ voor de elementaire matrix met het element c op de ij-de plaats.

Links vermenigvuldigen met een elementaire matrix $E_{ij}(c)$ komt overeen met het vervangen van de i-de rij in een matrix door de i-de rij plus c keer de j-de rij, dus met een elementaire rij-operatie van type I (zie Definitie 1.4.5 en Opmerking 1.4.7).

Opmerking 5.5.2. (1) Rechtsvermenigvuldiging met een elementaire matrix $E_{ij}(c)$ komt overeen met het vervangen van de j-de kolom door de j-de kolom plus een veelvoud van de i-de kolom.

(2) De determinant van elementaire matrices is gelijk aan 1; het zijn dus elementen van de algemene lineaire groep.

Stelling 5.5.3. *Elke matrix $A \in \mathsf{GL}_n(K)$ is van de vorm*

$$A = SD,$$

met S een product van elementaire matrices en $D = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, d)$ met $d = \det A$.

Bewijs. Het is voldoende aan te tonen dat door elementaire rij-operaties van type I een matrix A in $\mathsf{GL}_n(K)$ kan gereduceerd worden tot een matrix van de vorm $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, d)$.

Vermits de matrix rang n heeft is er een element in de eerste kolom dat niet nul is. Door de eerste rij te vervangen door de rij bekomen door bij de eerste rij een geschikt veelvoud van de rij waarin dit element staat op te tellen bekomen we een matrix met op de $(1, 1)$-de plaats een 1. (Indien $a_{11} \neq 0$ maar alle andere elementen van de eerste kolom wel nul zijn, tellen we eerst de eerste rij op bij de tweede rij, om de voorgaande operatie mogelijk te maken.)

Door nu voor $i = 2, \ldots, n$, de i-de rij te vervangen door een rij bekomen door bij de i-de rij een geschikt veelvoud van de eerste rij op te tellen, bekomen we voor elke $i = 2, \ldots, n$ op de $(i, 1)$-de plaats een 0. We hebben nu reeds een matrix van de vorm

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

waarbij B een $(n-1) \times (n-1)$-matrix is met $\det B \neq 0$, vermits $0 \neq \det A = \det A' = \det B$. Als de orde van B strikt groter is dan 1 kunnen we dus hetzelfde herhalen voor de matrix B, zonder de eerste rij van de matrix A' te veranderen. Inductief bekomen we tenslotte een bovendriehoeksmatrix met als diagonaal $(1, \ldots, 1, d)$, met $d = \det A$.

Met elementaire rij-operaties van type I kunnen we nu ook de elementen boven de diagonaal nul maken. Vermits de determinant van elementaire matrices gelijk is aan 1, is de determinant d van de gereduceerde matrix gelijk aan de determinant van de oorspronkelijke matrix A. □

Definitie 5.5.4. De deelgroep $\mathsf{SL}_n(K)$ van $\mathsf{GL}_n(K)$ die bestaat uit de matrices met determinant gelijk aan 1 noemt men de *speciale lineaire groep.*

Stelling 5.5.5. *Elke matrix in $\mathsf{SL}_n(K)$ is het product van elementaire matrices.*

Bewijs. Volgt onmiddellijk uit Stelling 5.5.3. □

We definiëren enkele deelgroepen van $\mathsf{GL}_n(K)$ en $\mathsf{SL}_n(K)$ die een rol spelen in verschillende delen van de wiskunde.

Definitie 5.5.6. De *orthogonale groep* en de *speciale orthogonale groep* zijn de deelgroepen van $\mathsf{GL}_n(K)$ gegeven door respectievelijk

$$\begin{aligned} \mathsf{O}_n(K) &:= \{A \in \mathsf{GL}_n(K) \mid AA^t = A^tA = I_n\}\,, \\ \mathsf{SO}_n(K) &:= \mathsf{O}_n(K) \cap \mathsf{SL}_n(K)\,. \end{aligned}$$

Merk op dat de elementen van $\mathsf{O}_n(K)$ steeds determinant ± 1 hebben. Indien $K = \mathbb{R}$, worden deze groepen vaak genoteerd als respectievelijk $\mathsf{O}(n)$ en $\mathsf{SO}(n)$.

Veronderstel nu dat K een veld is, voorzien van een *involutie* σ, i.e. een veldautomorfisme van de orde 2; we noteren $a^\sigma = \overline{a}$ voor alle $a \in K$. We definiëren nu voor alle $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ de *toegevoegde*[2] *matrix* $\overline{A} := (\overline{a}_{ij})$. De *unitaire groep* en de *speciale unitaire groep* zijn dan de deelgroepen van $\mathsf{GL}_n(K)$ gegeven door respectievelijk

$$\begin{aligned} \mathsf{U}_n(K,\sigma) &:= \{A \in \mathsf{GL}_n(K) \mid A\overline{A}^t = \overline{A}^tA = I_n\}\,, \\ \mathsf{SU}_n(K,\sigma) &:= \mathsf{U}_n(K,\sigma) \cap \mathsf{SL}_n(K)\,. \end{aligned}$$

Indien $K = \mathbb{C}$, waarbij de toevoeging de complexe toevoeging is, worden deze groepen vaak genoteerd als respectievelijk $\mathsf{U}(n)$ en $\mathsf{SU}(n)$.

De elementen van de orthogonale groep noemen we *orthogonale matrices*, de elementen van de unitaire groep noemen we *unitaire matrices*.

Opmerking 5.5.7. De reële groepen $\mathsf{O}(n)$ en $\mathsf{SO}(n)$, en de complexe groepen $\mathsf{U}(n)$ en $\mathsf{SU}(n)$, zijn voorbeelden van *Lie*[3] *groepen*; behalve de groepsstructuur hebben ze ook de bijkomende structuur van een differentieerbare variëteit, die bovendien compatibel is met de groepsstructuur.

---

[2]Dit dient niet verward te worden met het toegevoegd zijn van twee matrices (aan elkaar), zoals ingevoerd in Definitie 5.2.7.

[3]Genoemd naar de Noorse wiskundige Marius Sophus Lie (1842–1899), die in feite één van de grondleggers is van wat we nu kennen als groepentheorie.

Hoofdstuk

6 Lineaire operatoren

De doelstelling van dit hoofdstuk is om voor een gegeven lineaire operator een "goede" matrixvoorstelling te vinden die ons in staat stelt om deze operator beter te begrijpen. Dit is zowel voor theoretische als voor praktische doeleinden zeer belangrijk.

6.1 Eigenwaarden en eigenvectoren

Een essentieel begrip in de theorie van de lineaire operatoren is het begrip van een eigenvector.

Definitie 6.1.1. Zij V een K-vectorruimte en $f\colon V \to V$ een lineaire operator.

(i) Een niet-nul element $0 \neq v \in V$ is een *eigenvector* van f als $f(v) = \lambda v$ voor een $\lambda \in K$.

(ii) Zij $0 \neq v \in V$ een eigenvector van f met $f(v) = \lambda v$. Dan is λ een *eigenwaarde* van f.

(iii) Zij λ een eigenwaarde is van f. Dan is $\ker(\lambda \mathbf{1}_V - f)$ de *eigenruimte* van f bij de eigenwaarde λ.

We beschouwen voor elke $A \in M_n(K)$ de operator $L_A\colon K^n \to K^n$. Als we bovenstaande definitie toepassen op deze operator, bekomen we de volgende definitie voor de eigenwaarden en eigenvectoren van een matrix.

Definitie 6.1.2. Zij $A \in M_n(K)$ een $n \times n$-matrix over K.

(i) Een niet-nul element $0 \neq v \in K^n$ is een (rechtse[1]) *eigenvector* van A als $Av = \lambda v$ voor een $\lambda \in K$.

(ii) Zij $0 \neq v \in K^n$ een eigenvector van A met $Av = \lambda v$. Dan is λ een *eigenwaarde* van A.

[1]We kunnen ook *linkse* eigenvectoren definiëren door A te beschouwen als een lineaire operator op de *rijruimte* K^n via rechtse vermenigvuldiging; de linkse eigenvectoren van A zijn dus de (getransponeerde van) de rechtse eigenvectoren van A^t.

(iii) Zij λ een eigenwaarde van A. Dan is

$$\ker L_{(\lambda I_n - A)} = \{w \in K^n \mid (\lambda I_n - A)w = 0\}$$

de *eigenruimte* van A bij de eigenwaarde λ.

Opmerking 6.1.3. Stel dat λ een eigenwaarde van f is. Dan is de eigenruimte van f bij λ de unie van de verzameling van alle eigenvectoren bijhorende bij λ en de nulvector $0 \in V$ (die per definitie geen eigenvector is). We gaan dit gemakkelijk na:

$$\begin{aligned}\ker(f - \lambda\,\mathbf{1}_V) &= \{v \in V \mid (\lambda\,\mathbf{1}_V - f)v = 0\}\\ &= \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}\\ &= \{0\} \cup \{v \in V \setminus \{0\} \mid f(v) = \lambda v\}.\end{aligned}$$

Voorbeelden 6.1.4. (1) Zij $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in M_n(K)$. De elementen van de standaardbasis $e_1, \dots, e_n$ van K^n zijn eigenvectoren van A met respectieve eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

(2) Op de eindig-dimensionale ruimte K^n voor $n \in \mathbb{N}$ heeft de shiftoperator

$$S\colon K^n \to K^n\colon (a_1, \dots, a_n)^t \mapsto (0, a_1, \dots, a_{n-1})^t$$

eigenvectoren. De vectoren $(0, \dots, 0, a_n)^t$ zijn eigenvectoren met bijhorende eigenwaarde 0.

(3) We beschouwen nu de shiftoperator op de oneindig-dimensionale vectorruimte $K^{\mathbb{N}} = \prod_{i\in\mathbb{N}} K$ van rijen van elementen van K die gelabeld zijn met de natuurlijke getallen. De *shiftoperator*

$$S\colon K^{\mathbb{N}} \to K^{\mathbb{N}}\colon (a_0, \dots, a_n, \dots)^t \mapsto (0, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)^t$$

heeft geen eigenvectoren. Immers, als voor een $v \in K^{\mathbb{N}}$

$$S(v) = (0, a_0, \dots, a_n, \dots)^t = \lambda(a_0, \dots, a_n, \dots)^t$$

voor een zekere $\lambda \in K$, dan is $\lambda a_0 = 0$. Als $\lambda = 0$ volgt onmiddellijk dat $a_i = 0$ voor alle i; als $\lambda \neq 0$ is $a_0 = 0$, maar dan volgt uit $\lambda a_i = a_{i-1}$ voor alle $i \geq 1$ opnieuw dat alle $a_i = 0$. We concluderen dat uit $S(v) = \lambda v$ voor een $\lambda \in K$ volgt dat $v = 0$. Bijgevolg heeft S geen eigenvectoren.

We bespreken een methode om voor een lineaire operator f op een eindig-dimensionale vectorruimte V (of matrix $A \in M_n(K)$) alle eigenwaarden en eigenvectoren te bepalen.

In Definitie 5.4.5 hebben we de karakteristieke veelterm van een lineaire operator f en van een matrix ingevoerd. We bewijzen nu een zeer handig criterium om te bepalen welke elementen van K eigenwaarden bijhorend bij f zijn.

Stelling 6.1.5. (i) *Zij* $A \in M_n(K)$. *Een scalair* $\lambda \in K$ *is een eigenwaarde van* A *als en slechts als* $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = 0$.

(ii) *Zij* V *een* n*-dimensionale* K*-vectorruimte en* $f\colon V \to V$ *een lineaire operator. Een scalair* $\lambda \in K$ *is een eigenwaarde van* f *als en slechts als* $\chi_f(\lambda) = \det(\lambda\,\mathbf{1} - f) = 0$.

Bewijs. (i) Een element $\lambda \in K$ is een eigenwaarde van A als en slechts dan als er een $v \in K^n \setminus \{0\}$ bestaat waarvoor $(\lambda I_n - A)v = 0 \in K^n$, of nog, als en slechts als het homogeen $n \times n$-stelsel $(\lambda I_n - A)X = 0$ een niet-nul oplossing heeft, waarbij X een kolomvector is met n onbekenden.
Uit Stelling 2.5.14(ii) volgt dat $(\lambda I_n - A)X = 0$ een niet-nul oplossing heeft als en slechts als $\mathrm{rk}(\lambda I_n - A) < n$. Wegens Stelling 5.3.12 is dit op zijn beurt equivalent met $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

(ii) Zij $\mathcal{B}$ een willekeurige basis van V met bijhorend coördinatenisomorfisme $\beta\colon V \to K^n$, en zij A de matrixvoorstelling van f t.o.v. $\mathcal{B}$. Uit Opmerking 5.1.5(ii) volgt dat $A\beta(v) = \beta(f(v))$ voor alle $v \in V$. Dan gelden volgende equivalenties, met $v \in V$ en $\lambda \in K$:

$$f(v) = \lambda v \iff \beta(f(v)) = \lambda\beta(v) \iff A\beta(v) = \lambda\beta(v).$$

Met andere woorden, $v \in V$ is een eigenvector van f met eigenwaarde λ als en slechts als $\beta(v)$ een eigenvector is van A met eigenwaarde λ. Dus λ is een eigenwaarde van f als en slechts als het een eigenwaarde van A is. Wegens (i) is λ een eigenwaarde van f als en slechts als $\det(\lambda\,\mathbf{1} - f) = \det(\lambda I_n - A) = 0$. □

Gevolg 6.1.6. *Een lineaire operator* f *op een* n*-dimensionale* K*-vectorruimte* V *(of een matrix* $A \in M_n(K)$*) heeft hoogstens* n *eigenwaarden.*

Bewijs. De veelterm $\chi_f(x)$ (resp. $\chi_A(x)$), die van graad n is, kan hoogstens n wortels hebben in K. □

Constructie 6.1.7. Met behulp van de vorige stelling kunnen we nu een methode opstellen om alle eigenwaarden met bijhorende eigenvectoren van een matrix $A \in M_n(K)$ te bepalen:

(1) Bepaal de karakteristieke veelterm $\chi_A(x)$.

(2) Los de vergelijking $\chi_A(x) = 0$ op met $x \in K$. Er zijn maar eindig veel oplossingen $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ van deze vergelijking in K, dit zijn de eigenwaarden van A in K.

(3) Bepaal voor elke λ_i, $i = 1, \ldots, s$, de eigenruimte

$$\{w \in K^n \mid (\lambda_i I_n - A)w = 0 \in K^n\}.$$

Opmerking 6.1.8. De eerste stap van Constructie 6.1.7 kan men uitvoeren door de determinant van een matrix te berekenen; dit kan men steeds (met de nodige rekentijd) doen door bijvoorbeeld te ontwikkelen naar een geschikte rij of kolom. De derde stap komt neer op het oplossen van een lineair stelsel; dit kan men steeds (met de nodige rekentijd) doen door bijvoorbeeld rijreductie naar de echelonvorm uit te voeren.

De enige stap waarvoor we geen methode besproken hebben is de tweede stap, namelijk het bepalen van de wortels van een veelterm in één variabele van graad n. Als we werken in 2- of 3-dimensionale ruimten is het steeds mogelijk om alle oplossingen van de karakteristieke veelterm te berekenen. Voor hogere dimensies zijn er niet altijd algemene oplossingsmethoden bekend; het zoeken naar oplossingsmethoden voor veeltermen van hogere graad heeft tot de ontwikkeling van heel wat algebraïsche theorieën geleid. Zo kan men bijvoorbeeld *bewijzen* dat er (in zekere zin) geen algemene oplossingsmethode kan bestaan voor het bepalen van de oplossingen van veeltermvergelijkingen van graad 5 of hoger. De bespreking van dit probleem (over een willekeurig veld) is voor de wiskundigen onderwerp van de cursus "Algebra II".

6.2 Diagonaliseren van operatoren

We passen nu de theorie van de eigenwaarden en eigenvectoren toe om een gegeven lineaire operator f in een zo eenvoudig mogelijke gedaante te brengen. In het ideale geval kunnen we een basis vinden zodat de matrix van f een diagonaalmatrix is; we noemen de operator in dat geval diagonaliseerbaar.

Het diagonaliseren van matrices is in concrete toepassingen van uitermate groot belang. Een operator wordt vaak gegeven als een welbepaalde matrix, bijvoorbeeld bekomen door het uitvoeren van experimenten, en het diagonaliseren ervan (indien dit mogelijk is) zet de operator om in een zeer begrijpelijke en interpreteerbare gedaante: het geeft voor elke basisvector een "expansie- of contractiefactor" weer, zodat het gemakkelijk te visualiseren valt wat het effect is van het toepassen van de operator.

Stelling 6.2.1. *Een lineaire operator f op een eindig-dimensionale K-vectorruimte heeft een diagonaalmatrix als matrixvoorstelling als en slechts als V een basis heeft bestaande uit eigenvectoren voor f.*

Bewijs. Stel dat f ten opzichte van de basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ als matrixvoorstelling een diagonaalmatrix $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ heeft; dan is, voor alle $1 \le i \le n$,

$$f(b_i) = 0b_1 + \cdots + 0b_{i-1} + \lambda_i b_i + 0b_{i+1} + \cdots + 0b_n = \lambda_i b_i.$$

Dus $\mathcal{B}$ is een basis van V bestaande uit eigenvectoren van f.

Zij omgekeerd $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ een basis van eigenvectoren voor de operator $f \in \mathrm{End}(V)$. Uit $f(b_i) = \lambda_i b_i$ volgt dat de matrixvoorstelling van f ten opzichte van $\mathcal{B}$ een diagonaalmatrix is. □

Definitie 6.2.2. (i) Een operator f op een eindig-dimensionale vectorruimte V is *diagonaliseerbaar* als er een matrixvoorstelling van f is die een diagonaalmatrix is.

(ii) Een matrix $A \in M_n(K)$ is *diagonaliseerbaar* als de lineaire operator $L_A \colon K^n \to K^n$ diagonaliseerbaar is.

Lemma 6.2.3. *Een matrix $A \in M_n(K)$ is diagonaliseerbaar als en slechts als er een matrix $P \in \mathsf{GL}_n(K)$ bestaat zodat $P^{-1}AP$ een diagonaalmatrix is.*

Bewijs. Zij $\mathcal{B}$ de standaardbasis van K^n. Veronderstel eerst dat A (en dus L_A) diagonaliseerbaar is. Dan bestaat er een basis $\mathcal{B}' = \{b_1, \dots, b_n\}$ bestaande uit eigenvectoren. Zij nu P de transitiematrix van $\mathcal{B}$ naar $\mathcal{B}'$; dan is $L_{P^{-1}AP}$ de afbeelding die b_i afstuurt op $\lambda_i b_i$. Bijgevolg is $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Veronderstel omgekeerd dat er een $P \in \mathsf{GL}_n(K)$ is zodat $P^{-1}AP$ een diagonaalmatrix is, en beschouw de basis $\mathcal{B}' = \{Pe_1, \dots, Pe_n\}$ van K^n. Het is duidelijk dat de matrix van L_A ten opzichte van de basis $\mathcal{B}'$ dan precies de diagonaalmatrix $P^{-1}AP$ is. □

Stelling 6.2.4. *Zij V een n-dimensionale vectorruimte, en zij $f \in \mathrm{End}(V)$.*

(i) *De eigenvectoren van f die horen bij verschillende eigenwaarden, zijn lineair onafhankelijk van elkaar.*

(ii) *Als f juist n verschillende eigenwaarden heeft, dan is f diagonaliseerbaar.*

(iii) *Als f diagonaliseerbaar is, dan is V de directe som van de eigenruimten van f horende bij de verschillende eigenwaarden van f.*

Bewijs. (i) Zij $\{v_i\}_{i \in I}$ een verzameling van eigenvectoren van een operator f met $f(v_i) = \lambda_i v_i$ waarbij alle λ_i verschillend zijn. We argumenteren uit het ongerijmde. Als $\{v_i\}_{i \in I}$ lineair afhankelijk is, dan is er een relatie

$$a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell = 0\,, \tag{6.1}$$

met ℓ minimaal zodat alle termen ongelijk zijn aan nul. We nemen het beeld van het linkerlid onder f, en we bekomen

$$f(a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell) = a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_\ell \lambda_\ell v_\ell = 0\,. \tag{6.2}$$

Vermenigvuldig vergelijking (6.1) met λ_1 en trek deze af van vergelijking (6.2); dan is

$$a_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \ldots + a_\ell(\lambda_\ell - \lambda_1)v_\ell = 0\,.$$

Vermits alle $a_i \neq 0$ en voor alle $i = 2, \ldots, \ell$, $(\lambda_i - \lambda_1) \neq 0$, bekomen we een lineaire relatie met minder dan ℓ termen. Dit is een tegenspraak met de keuze van ℓ.

(ii) Aangezien er n verschillende eigenwaarden zijn voor f, volgt er uit (i) dat er n lineair onafhankelijke eigenvectoren zijn voor f. Een lineair onafhankelijke verzameling met n elementen is een basis voor V. Uit Stelling 6.2.1 volgt nu het gestelde.

(iii) Veronderstel dat $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ de verschillende eigenwaarden van f zijn. Aangezien f diagonaliseerbaar is, is er een basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ van V zodat de matrix A van f een diagonaalmatrix is, waarbij de elementen op de diagonaal van A precies de eigenwaarden van f zijn. We ordenen de basis $\mathcal{B}$ zodanig dat de eigenwaarden gegroepeerd staan:

$$A = \operatorname{diag}\big(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{n_1 \text{ keer}}, \ldots, \underbrace{\lambda_\ell, \ldots, \lambda_\ell}_{n_\ell \text{ keer}}\big)\,.$$

Stel nu $m_1 = 0$ en $m_i = n_1 + \cdots + n_{i-1}$ voor elke $i \in \{2, \ldots, \ell\}$; dan is de eigenruimte V_i behorende bij de eigenwaarde λ_i gelijk aan

$$V_i = \langle v_{m_i+1}, \ldots, v_{m_i+n_i} \rangle\,,$$

en duidelijkerwijze is nu

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_\ell\,. \qquad \square$$

Niet alle lineaire operatoren zijn diagonaliseerbaar. We werken twee voorbeelden uit van matrices over $\mathbb{R}$ die niet diagonaliseerbaar zijn, en een voorbeeld van een matrix die wel diagonaliseerbaar is:

Voorbeelden 6.2.5. (1) Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

De karakteristieke vergelijking van A is

$$\chi_A(x) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1);$$

deze heeft twee oplossingen, namelijk 1 en -1, waarbij 1 multipliciteit 2 heeft. We hebben dus twee verschillende eigenwaarden $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -1$. De eigenruimte bij $\lambda_1 = 1$ is gelijk aan $\{(r, s, s)^t \mid r, s \in \mathbb{R}\}$, de eigenruimte bij $\lambda_2 = -1$ is gelijk aan $\{(0, r, -r)^t \mid r \in \mathbb{R}\}$. We vinden dus dat

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

een basis van $\mathbb{R}^3$ is die bestaat uit eigenvectoren. Bijgevolg is A diagonaliseerbaar; de matrixvoorstelling van $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon v \mapsto Av$ t.o.v. $\mathcal{B}$ is $\operatorname{diag}(1, 1, -1)$.

(2) Beschouw de matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

De karakteristieke vergelijking van B is

$$\chi_B(x) = (x-1)(x+1)^2;$$

deze heeft twee oplossingen, namelijk 1 en -1, waarbij -1 multipliciteit 2 heeft. We hebben dus twee verschillende eigenwaarden $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -1$. De eigenruimte bij $\lambda_1 = 1$ is gelijk aan $\{(r, 0, 0)^t \mid r \in \mathbb{R}\}$, de eigenruimte bij $\lambda_2 = -1$ is gelijk aan $\{(0, 0, r)^t \mid r \in \mathbb{R}\}$. Er zijn te weinig lineair onafhankelijke eigenvectoren om een basis van $\mathbb{R}^3$ te construeren; bijgevolg is B niet diagonaliseerbaar.

(3) Beschouw de matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

De karakteristieke vergelijking van C is

$$\chi_C(x) = (x-1)(x^2+1);$$

deze heeft vergelijking heeft slechts één oplossing over $\mathbb{R}$, namelijk 1. We hebben dus één eigenwaarde $\lambda = 1$. De eigenruimte bij $\lambda = 1$ is gelijk aan $\{(r, 0, 0)^t \mid r \in \mathbb{R}\}$. We hebben dus opnieuw te weinig lineair onafhankelijke eigenvectoren om een basis van $\mathbb{R}^3$ te construeren; bijgevolg is C niet diagonaliseerbaar.

In het voorgaande voorbeeld hebben we twee matrices B en C bekeken die niet diagonaliseerbaar zijn over $\mathbb{R}$. Deze twee voorbeelden van niet-diagonaliseerbare operatoren zijn echter verschillend van aard.

In voorbeeld (3) heeft de karakteristieke vergelijking van C slechts één oplossing over $\mathbb{R}$ (multipliciteiten van de oplossingen meegerekend). De operator is niet diagonaliseerbaar, omdat als we de wortels tellen met hun multipliciteit, de karakteristieke vergelijking *niet genoeg wortels* heeft.

In voorbeeld (2) heeft de karakteristieke vergelijking van B wel genoeg wortels, namelijk één van multipliciteit 1 en één van multipliciteit 2. Maar in dit geval zijn de dimensies van de eigenruimten te klein om een basis van eigenvectoren te hebben.

Voorbeeld 6.2.6. Zoals we hebben vermeld, was het probleem bij Voorbeeld 6.2.5(3) dus dat we te weinig wortels hebben. We bekijken nu wat er gebeurt als we de matrix C beschouwen over het veld $\mathbb{C}$ in plaats van over het veld $\mathbb{R}$. Stel dus

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

De karakteristieke vergelijking van C is (met $i \in \mathbb{C}$ met $i^2 = -1$)

$$\chi_C(x) = (x-1)(x^2+1) = (x-1)(x+i)(x-i);$$

deze vergelijking heeft nu drie verschillende oplossingen over $\mathbb{C}$, namelijk $1, -i, i$. De matrix C heeft dus drie verschillende eigenwaarden, namelijk $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = i$, en uit Stelling 6.2.4(ii) volgt onmiddellijk dat C diagonaliseerbaar is.

Voor de volledigheid bepalen we de eigenruimten van C. De eigenruimte bij $\lambda_1 = 1$ is gelijk aan $\{(r,0,0)^t \mid r \in \mathbb{C}\}$. De eigenruimte bij $\lambda_2 = i$ is gelijk aan $\{(0,r,-ir)^t \mid r \in \mathbb{C}\}$. De eigenruimte bij $\lambda_3 = -i$ is gelijk aan $\{(0,r,ir)^t \mid r \in \mathbb{C}\}$. We vinden dus dat

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}$$

een basis van $\mathbb{C}^3$ is die bestaat uit eigenvectoren. Hieruit volgt dus nogmaals dat A diagonaliseerbaar is; de matrixvoorstelling van $L_A \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \colon v \mapsto Av$ t.o.v. $\mathcal{B}$ is $\operatorname{diag}(1, i, -i)$.

In het vorig voorbeeld hebben we aangetoond dat de matrix C over $\mathbb{C}$ wel diagonaliseerbaar is. Maar natuurlijk is ook niet iedere matrix over $\mathbb{C}$

diagonaliseerbaar: als we de matrix B over het veld $\mathbb{C}$ gaan beschouwen, dan blijft deze niet diagonaliseerbaar.

Opmerking 6.2.7. (i) In een algemeen veld K kan het ook voorkomen dat de karakteristieke veelterm niet genoeg wortels heeft over K. Voor de wiskundigen wordt in de cursus "Algebra II" aangetoond dat er dan steeds een groter veld bestaat dat K bevat waarover de karakteristieke veelterm dan wel genoeg wortels heeft. Een dergelijk veld wordt dan een *splijtveld* van de karakteristieke vergelijking genoemd.

(ii) Uit Gevolg 1.2.7 volgt dat elke veelterm van graad n over de complexe getallen $\mathbb{C}$ wél n wortels heeft (als we de multipliciteiten meerekenen).

(iii) Als de karakteristieke vergelijking van f op een n-dimensionale K-vectorruimte n wortels heeft, dan kunnen we deze schrijven als

$$\chi_f(x) = \prod_{i=1}^{t} (x - \lambda_i)^{n_i}, \text{ met } \lambda_i \in K,$$

waarbij $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ de verschillende wortels van χ_f zijn.

We onderzoeken nu wanneer een operator met een bovenstaande karakteristieke vergelijking diagonaliseerbaar is. Hiertoe voeren we volgende definitie in.

Definitie 6.2.8. Zij V een K-vectorruimte en $f\colon V \to V$ een lineaire operator met als karakteristieke veelterm

$$\chi_f(x) = \prod_{i=1}^{t} (x - \lambda_i)^{n_i} \quad \text{met } \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in K.$$

(We merken nogmaals op dat dit een assumptie is.)

(i) De *algebraïsche multipliciteit* van een eigenwaarde λ_i van f is gelijk aan n_i, i.e. de multipliciteit van λ_i als wortel van de karakteristieke veelterm $\chi_f(x)$.

(ii) De *meetkundige multipliciteit* van een eigenwaarde λ_i van f is gelijk aan de dimensie de eigenruimte behorende bij λ_i, dit is dus gelijk aan $\dim \ker(\lambda_i \mathbf{1} - f)$.

Merk op dat de meetkundige multipliciteit van een eigenwaarde steeds groter dan of gelijk aan 1 is.

Lemma 6.2.9. *Zij V een K-vectorruimte en $f\colon V \to V$ een lineaire operator met karakteristieke veelterm*

$$\chi_f(x) = \prod_{i=1}^{t} (x - \lambda_i)^{n_i} \quad \textit{met } \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in K.$$

Voor iedere i is $\dim(\ker(\lambda_i \mathbf{1_V} - f)) \leq n_i$. *Anders gezegd, de meetkundige multipliciteit van een eigenwaarde is steeds kleiner dan of gelijk aan de algebraïsche multipliciteit van deze eigenwaarde.*

Bewijs. We noteren de eigenruimte behorende bij de eigenwaarde λ_i met $V_i = \ker(\lambda_i \mathbf{1_V} - f)$. Zij dan $r_i := \dim(V_i)$ de meetkundige dimensie van λ_i. We zullen aantonen dat $(x-\lambda_i)^{r_i}$ een deler is van het karakteristiek polynoom van f; dit impliceert dan dat $r_i \leq n_i$.

Beschouw nu een vaste i, en stel $r = r_i$ en $\lambda = \lambda_i$. Zij $\{v_1, \ldots, v_r\}$ een basis van V_i. We breiden deze basis uit tot een basis van V: $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s\}$. We stellen de matrixvoorstelling op van f ten opzichte van deze basis. Deze wordt bekomen door de matrix te beschouwen waarvan de kolommen

$$f(v_1), \ldots, f(v_r), f(w_1), \ldots, f(w_s)$$

zijn. We hebben

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \lambda v_1 \\ f(v_2) &= \lambda v_2 \\ &\vdots \\ f(v_r) &= \lambda v_r; \end{aligned}$$

over de beelden $f(w_1), \ldots, f(w_s)$ hebben we geen bijkomende informatie. Dan is de matrixvoorstelling van f t.o.v. $\mathcal{B}$ gelijk aan

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_r & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

voor zekere (onbekende) matrices $B \in M_{r,n-r}(K)$ en $C \in M_{n-r}(K)$.

Er geldt dat $\chi_f(x) = \det(xI_n - A)$. Als we deze determinant bepalen door telkens (r opeenvolgende malen) te ontwikkelen naar de eerste kolom, volgt er dat $(x - \lambda)^r$ een deler is van $\chi_f(x) = \det(xI_n - A)$. $\square$

Uit het voorgaand lemma volgt dat, als de algebraïsche multipliciteit van een eigenwaarde gelijk is aan 1, de meetkundige multipliciteit dan ook gelijk is aan 1.

We kunnen nu een criterium bewijzen voor het al dan niet diagonaliseerbaar zijn van een operator.

Stelling 6.2.10. *Zij V een K-vectorruimte en $f\colon V \to V$ een lineaire operator met karakteristieke veelterm*

$$\chi_f(x) = \prod_{i=1}^{t} (x - \lambda_i)^{n_i} \quad \textit{met } \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in K.$$

Zij $V_i = \ker(\lambda_i \mathbf{1_V} - f)$ de eigenruimte behorende bij de eigenwaarde λ_i, voor elke i. Dan is f diagonaliseerbaar als en slechts als voor elke eigenwaarde λ_i geldt dat $\dim(V_i) = n_i$, of met andere woorden, als en slechts als voor iedere eigenwaarde de algebraïsche multipliciteit gelijk is aan de meetkundige multipliciteit.

Bewijs. Aangezien de graad van $\chi_f(x)$ gelijk is aan n, is $\dim(V) = n = n_1 + \cdots + n_t$. Voor iedere eigenruimte V_i kiezen we een basis $\mathcal{B}_i$. Uit Stelling 6.2.4(i) volgt dat de verzameling $\mathcal{C} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_t$ lineair onafhankelijk is.

Nu splitsen we op in twee gevallen:

(i) Stel dat $\dim(V_i) = n_i$ voor alle i. We tellen het aantal elementen in $\mathcal{C}$; dit is gelijk aan

$$\dim(V_1) + \cdots + \dim(V_t) = n_1 + \cdots + n_t = n = \dim(V).$$

Dus $\mathcal{C}$ is een basis van V bestaande uit eigenvectoren van f. Uit Stelling 6.2.1 volgt dat f diagonaliseerbaar is.

(ii) Stel dat $\dim(V_i) < n_i$ voor een bepaalde i, en merk op dat steeds $\dim(V_j) \leq n_j$ voor alle j. In dit geval is het aantal elementen in $\mathcal{C}$ kleiner dan $\dim(V)$:

$$\dim(V_1) + \cdots + \dim(V_t) < n_1 + \cdots + n_t = n = \dim(V).$$

Hieruit volgt dat $\mathcal{C}$ geen basis is van V. Aangezien iedere eigenvector van f in $\operatorname{span}(\mathcal{C})$ zit, kunnen we nooit $\dim(V)$ lineair onafhankelijke eigenvectoren vinden. Dus f is niet diagonaliseerbaar. $\square$

We illustreren dit nieuwe criterium aan de hand van enkele voorbeelden.

Voorbeelden 6.2.11. (1) We beschouwen de matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$ uit Voorbeeld 6.2.5. Aangezien $\chi_A(x) = (x-1)^2(x+1)$, kunnen we Stelling 6.2.10 toepassen. De eigenwaarde λ_1 heeft algebraïsche multipliciteit 2, de eigenwaarde λ_2 heeft algebraïsche multipliciteit 1. Uit de bepaling van de eigenruimten volgt dat de eigenwaarde λ_1 meetkundige multipliciteit 2 heeft; we kunnen dus onmiddellijk concluderen dat A diagonaliseerbaar is.

(2) Beschouw de matrix $B \in M_3(\mathbb{R})$ uit Voorbeeld 6.2.5. Aangezien $\chi_B(x) = (x-1)(x+1)^2$ kunnen we Stelling 6.2.10 toepassen. De eigenwaarde λ_1 heeft algebraïsche multipliciteit 1, de eigenwaarde λ_2 heeft algebraïsche multipliciteit 2. Uit de bepaling van de eigenruimten volgt dat de eigenwaarde λ_2 meetkundige multipliciteit 1 heeft; we kunnen dus onmiddellijk concluderen dat B niet diagonaliseerbaar is.

(3) Beschouw de shiftoperator S op K^n uit Voorbeeld 6.1.4(2), en beschouw de standaardbasis $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ van K^n. Ten opzichte van deze basis $\mathcal{B}$ heeft S de matrixvoorstelling

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Herhaaldelijk ontwikkelen naar de laatste kolom geeft $\chi_A(x) = x^n$; we kunnen dus Stelling 6.2.10 toepassen. De shiftoperator S heeft dus 1 eigenwaarde $\lambda = 0$ met algebraïsche multipliciteit n. De eigenruimte bij λ is gelijk aan $\{(0, \dots, 0, k) \mid k \in K\}$; bijgevolg is de meetkundige multipliciteit van λ gelijk aan 1. We besluiten dat S niet diagonaliseerbaar is.

Opmerking 6.2.12. Zij V een K-vectorruimte en $f\colon V \to V$ een lineaire operator met karakteristieke veelterm

$$\chi_f(x) = \prod_{i=1}^{t} (x - \lambda_i)^{n_i} \quad \text{met } \lambda_1, \dots, \lambda_t \in K.$$

Als f niet diagonaliseerbaar is, is het toch steeds mogelijk om een "mooie" matrixvoorstelling voor f te geven.

Er bestaat namelijk steeds een basis voor V zodat de matrixvoorstelling van f ten opzichte van deze basis een zeer eenvoudige vorm heeft, namelijk een blokdiagonaalmatrix

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & & & \\ \hline & J_2 & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & J_m \end{array}\right),$$

waarbij de blokken matrices zijn met een unieke eigenwaarde λ, met 1-en juist onder de diagonaal, en met alle andere componenten gelijk aan nul, i.e. blokken van de vorm

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Matrices met deze bijzondere vorm noemen we *Jordan*[2] *matrices*. De blokdiagonale matrixvoorstelling van f noemt men de de *Jordan normaalvorm* van f.

Voor een bewijs van dit feit verwijzen we voor de wiskundigen naar de cursus "Lineaire algebra en meetkunde II".

6.3 Hermitische en symmetrische operatoren

We bestuderen het diagonaliseerbaar zijn van bijzondere klassen van operatoren op de standaard inproduct-ruimten over $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$.

Definitie 6.3.1. (i) Beschouw de n-dimensionale inproduct-ruimte $\mathbb{C}^n$ met het standaard inproduct $\langle v, w\rangle = v^t\overline{w}$. Zij $f\colon W \to W$ een operator op een deelruimte $W \leq \mathbb{C}^n$. We noemen f een *hermitische*[3] *operator* als voor alle $v, w \in W$ geldt dat

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle\,. \tag{6.3}$$

[2] Genoemd naar de Franse wiskundige Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922).
[3] Genoemd naar de Franse wiskundige Charles Hermite (1822–1901).

Als $f = L_A$ een hermitische operator is op $\mathbb{C}^n$, dan geldt dat voor alle $v, w \in \mathbb{C}^n$ dat

$$v^t A^t \overline{w} = (Av)^t \overline{w} = v^t (\overline{Aw}) = v^t \overline{A} \overline{w}\,,$$

waaruit volgt dat

$$A^t = \overline{A}\,.$$

Dergelijke matrices noemen we *hermitische matrices.*

(ii) We kunnen precies dezelfde definitie beschouwen voor $\mathbb{R}^n$ in plaats van $\mathbb{C}^n$; we noemen $f\colon W \to W$ met $W \leq \mathbb{R}^n$ een *symmetrische operator* als voor alle $v, w \in W$ de gelijkheid (6.3) geldt. Indien $f = L_A$ een symmetrische operator is op $\mathbb{R}^n$, dan is $A^t = A$, i.e. A is een symmetrische matrix. Merk dus op dat de reële hermitische matrices juist de symmetrische matrices zijn.

Stelling 6.3.2. *Zij f een hermitische operator op $\mathbb{C}^n$. Dan geldt:*

(i) *Alle eigenwaarden van f zijn reëel.*

(ii) *Eigenvectoren behorende bij twee verschillende eigenwaarden zijn orthogonaal.*

(iii) *De operator f is diagonaliseerbaar, en er bestaat steeds een orthonormale basis van eigenvectoren voor f.*

Bewijs. (i) Stel dat λ een eigenwaarde is van f met eigenvector v, m.a.w. $f(v) = \lambda v$. Nu is

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle f(v), v\rangle = \langle v, f(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle.$$

Omdat $v \neq 0 \in \mathbb{C}^n$, is $\langle v, v\rangle \neq 0$, zodat $\lambda = \overline{\lambda}$ en dus $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Stel dat λ een eigenwaarde is van f met eigenvector v en μ een eigenwaarde is van f met eigenvector w met $\lambda \neq \mu$. Aangezien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ is

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle = \mu\langle v, w\rangle.$$

Er volgt dat $(\lambda - \mu)\langle v, w\rangle = 0$, dus is $\langle v, w\rangle = 0$.

(iii) We tonen aan dat er een orthonormale basis van eigenvectoren van f bestaat door gebruik te maken van inductie naar de dimensie. Voor 1-dimensionale ruimten is de uitspraak triviaal.

Als inductiehypothese nemen we aan dat er voor iedere hermitische operator op $\mathbb{C}^{n-1}$ een orthonormale basis van eigenvectoren is. Stel dat f een eigenvector v met eigenwaarde λ heeft; deze bestaat zeker want de karakteristieke vergelijking van f heeft steeds een wortel in $\mathbb{C}$. Noem W het orthogonaal complement van $\mathbb{C}v$, dus $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}v \oplus W$ en $\dim(W) = n - 1$ (zie Gevolg 4.2.5). Voor $w \in W$ geldt dus dat $\langle v, w\rangle = 0$. We tonen aan dat ook $\langle v, f(w)\rangle = 0$:

$$\langle v, f(w)\rangle = \langle f(v), w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle = 0.$$

Hieruit volgt dat $f(W) \subseteq W$, wat betekent dat de restrictie van f tot W een hermitische operator is op W. Omdat $\dim W = n - 1$ volgt nu uit de inductiehypothese dat W een orthonormale basis van eigenvectoren heeft voor de restrictie van f op W; deze basis noteren we met $\{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$. Aangezien $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}v \oplus W$, is

$$\left\{\tfrac{1}{\|v\|}v, w_1, \ldots, w_{n-1}\right\}$$

een orthonormale basis van V bestaande uit eigenvectoren van f. □

Opmerking 6.3.3. In de praktijk gaan we vaak als volgt te werk om een orthonormale basis van eigenvectoren van een hermitsiche operator te vinden. We bepalen eerst de eigenwaarden en eigenruimten voor f; aangezien f diagonaliseerbaar is, is V de directe som van de eigenruimten. Voor iedere eigenruimte apart bepalen we nu een orthonormale basis bestaande uit eigenvectoren van f. Wanneer we al deze basisvectoren samenvoegen krijgen we een basis van V. Uit Stelling 6.3.2(ii) volgt dan dat al deze basisvectoren loodrecht op elkaar staan.

Gevolg 6.3.4. *Beschouw de inproduct-ruimte $\mathbb{R}^n$ met het standaard inproduct $\langle v, w\rangle = v^t w$. Zij A een symmetrische matrix in $M_n(\mathbb{R})$.*

Alle eigenwaarden van A zijn reëel en er bestaat een orthonormale basis van eigenvectoren voor A, dus A is diagonaliseerbaar.

Bovendien is de transitiematrix van de standaardbasis naar een orthonormale basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ van eigenvectoren voor A een orthogonale matrix P, en er geldt dat

$$P^t A P = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,,$$

waarbij $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de eigenwaarden van A zijn (die alle reëel zijn). De i-de kolom van P bestaat precies uit de coördinaten van de eigenvector b_i ten opzichte van de standaardbasis.

Bewijs. Een symmetrische matrix in $M_n(\mathbb{R})$ definieert een hermitische matrix over $\mathbb{C}$; we kunnen dus Stelling 6.3.2 toepassen. De rest van het gestelde volgt uit Opmerking 5.2.4(ii), Opmerking 5.2.6 en Stelling 5.2.8. □

Hoofdstuk

7 De Euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$

In Hoofdstuk 4 hebben we algemene inproduct-ruimten over $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ bestudeerd. In dit hoofdstuk bestuderen we de Euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$ in meer detail, en in het bijzonder behandelen we een aantal meetkundige aspecten. We gaan ondermeer nader in op rechten, vlakken en hypervlakken.

Zoals we zullen zien, krijgen we nog meer bijkomende structuur als we de Euclidische ruimte $\mathbb{R}^3$ in drie dimensies beschouwen, omdat we op een dergelijke ruimte ook nog eens een *vectorieel product* zullen kunnen definiëren.

7.1 Hoeken in een reële inproduct-ruimte

In Definitie 4.2.1(i) hebben we voor algemene inproduct-ruimten over $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ gedefinieerd wanneer twee vectoren v, w orthogonaal of loodrecht zijn; dit is het geval als $\langle v, w\rangle = 0$. Vanuit het klassieke standpunt zouden we het begrip orthogonaliteit graag koppelen aan een notie van een hoek, en in het bijzonder zodanig dat orthogonaliteit overeenkomt met een hoek van 90° oftewel $\pi/2$. Algemenere hoeken definiëren blijkt echter, in onze context, enkel zinvol te zijn in inproduct-ruimten over $\mathbb{R}$ en niet over $\mathbb{C}$.

Veronderstel vanaf nu dat $(V, \langle ., .\rangle)$ een inproduct-ruimte is over $\mathbb{R}$. We kunnen de ongelijkheid van Cauchy–Schwarz (zie Stelling 4.1.7) voor alle $v, w \in V \setminus \{0\}$ herschrijven in de vorm

$$-1 \leq \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1 \,.$$

Bijgevolg is de volgende definitie zinvol.

Definitie 7.1.1. Zij $(V, \langle ., .\rangle)$ een reële inproduct-ruimte. Voor elke twee niet-nul vectoren $v, w \in V$ definiëren we de *hoek* tussen v en w als

$$\angle(v, w) := \arccos \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \,,$$

waarbij we aannemen dat arccos waarden aanneemt in het interval $[0, \pi]$.

Aangezien het inproduct symmetrisch is, is het duidelijk dat ook $\angle$ symmetrisch is, i.e. $\angle(v,w) = \angle(w,v)$ voor alle $v, w \in V$.

Opmerking 7.1.2. (i) Merk op dat $\angle(v,w) = 0$ als en slechts als v en w een positief veelvoud zijn van elkaar, en dat $\angle(v,w) = \pi$ als en slechts als v en w een negatief veelvoud zijn van elkaar, in overeenstemming met onze intuïtie over het hoek-begrip.

(ii) Merk anderzijds op dat $\angle(v,w) = \pi/2$ als en slechts als $\langle v,w\rangle = 0$. De bovenstaande definitie van hoek is dus compatibel met Definitie 4.2.1(i).

We bekijken nu in detail hoe de formules er uitzien als we ons beperken tot de Euclidische n-dimensionale ruimte. Beschouw dus de inproduct-ruimte $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ waarbij het inproduct het standaard Euclidische inproduct is zoals in Voorbeeld 4.1.4(1). Stel $v = (x_1, \dots, x_n)^t$ en $w = (y_1, \dots, y_n)^t$, dan is

$$\langle v, w\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \,,$$

en bijgevolg krijgen we voor de hoek

$$\angle(v,w) = \arccos \frac{x_1y_1 + \cdots + x_ny_n}{\sqrt{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)}} \,.$$

Notatie 7.1.3. Wanneer we werken in de Euclidische ruimte, is het zeer gebruikelijk om het inproduct van twee vectoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ niet als $\langle u,v\rangle$ te noteren, maar simpelweg als $u \cdot v$ of uv. Overeenkomstig zullen we ook soms $\|v\|^2 = \langle v,v\rangle$ schrijven als vv of zelfs v^2. We zullen ook zelf in het vervolg deze conventies aanhouden. Dit zou geen verwarring mogen veroorzaken, aangezien er geen andere natuurlijke vermenigvuldiging is gedefinieerd op een vectorruimte. Zie echter wel de volgende paragraaf 7.2, waar we in $\mathbb{R}^3$ wel een vermenigvuldiging zullen invoeren die een paar van vectoren op een vector afbeeldt; dit vectorieel product zullen we echter steeds als $u \times v$ noteren.

7.2 Het vectorieel product in $\mathbb{R}^3$

In deze paragraaf bestuderen we de Euclidische ruimte $\mathbb{E}^3$ verder. Meer bepaald zullen we het *vectorieel product* invoeren (ook wel *kruisproduct* of *vectorproduct* genoemd). Dit product zal een paar van vectoren in $\mathbb{R}^3$ afbeelden op een nieuwe vector in $\mathbb{R}^3$ (in tegenstelling tot het inproduct dat een paar van vectoren afbeeldt op een element van het grondveld $\mathbb{R}$). Echter, om tot een intrinsieke definitie te komen (d.w.z. een definitie die niet afhangt van de keuze van een coördinatenstelsel, of dus van een orthonormale basis) zal het nodig zijn om de vectorruimte te *oriënteren*.

Definitie 7.2.1. (i) Beschouw twee geordende basissen $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ en $\mathcal{B}' = \{f_1, \ldots, f_n\}$ van $\mathbb{R}^n$, en zij Q de matrix van de basisovergang, d.w.z. $Q = (q_{ij})$ waarbij $f_j = q_{1j}e_1 + \cdots + q_{nj}e_n$ voor alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Als $\det(Q) > 0$, dan noemen we de basissen $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$ *gelijk georiënteerd*; als $\det(Q) < 0$, dan noemen we ze *tegengesteld georiënteerd*.

(ii) Het is duidelijk dat "gelijk georiënteerd zijn" een equivalentierelatie definieert op de verzameling van geordende basissen, en dat deze verzameling bestaat uit precies twee equivalentieklassen. We kiezen willekeurig één van deze klassen en noemen de basissen in deze klasse *positief georienteerd* of *direct georiënteerd*, en we noemen de andere klasse *negatief georiënteerd* of *indirect georiënteerd* .

(iii) Het is gebruikelijk om aan te nemen dat de standaardbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ van $\mathbb{R}^n$ positief georiënteerd is, en we zullen deze conventie in deze cursus ook gebruiken. Zij dan $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ een willekeurige basis, met transitiematrix $Q \in M_n(K)$. Als $\det Q > 0$, dan is $\mathcal{B}$ positief georiënteerd; als $\det Q < 0$, dan is $\mathcal{B}$ negatief georiënteerd.

Beschouw de groepen $\mathsf{O}(n)$ en $\mathsf{SO}(n)$ die we hebben ingevoerd in Definitie 5.5.6.

Lemma 7.2.2. *Beschouw de Euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$. Zij $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ en $\mathcal{B}' = \{f_1, \ldots, f_n\}$ twee orthonormale basissen van $\mathbb{R}^n$, en zij Q de matrix van de basisovergang. Als $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$ gelijk georiënteerd zijn, dan is $Q \in \mathsf{SO}(n)$, i.e. $QQ^t = Q^tQ = I_n$ en $\det Q = 1$.*

Bewijs. Uit Stelling 5.2.8 weten we dat $Q^tQ = I_n$ en dus is $Q \in \mathsf{O}_n$ (zie Definitie 5.5.6); in het bijzonder is $\det(Q) \in \{1, -1\}$.

Uit de voorgaande definitie weten we dat $\det(Q) > 0$ als de basissen gelijk georiënteerd zijn, terwijl $\det(Q) < 0$ als ze tegengesteld georiënteerd zijn. Bijgevolg is $\det(Q) = 1$, en dus $Q \in \mathsf{SO}(n)$. □

We veronderstellen dat we werken in $V = \mathbb{R}^3$ met de Euclidische norm, en we kiezen de oriëntatie zodanig dat de standaardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ een positief georiënteerde orthonormale basis is. Dan kunnen we als volgt een afbeelding definiëren van $V \times V$ naar V; we tonen verderop aan dat deze definitie niet afhangt van de keuze van de positief georiënteerde orthonormale basis.

Definitie 7.2.3 (vectorieel product)**.** Zij $v = (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3$ en $w = (y_1, y_2, y_3)^t \in \mathbb{R}^3$ twee willekeurige elementen. Dan definiëren we het *vectorieel product* van v en w als

$$v \times w := (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)^t \,. \tag{7.1}$$

We kunnen dit symbolisch schrijven als

$$v \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

waarbij we benadrukken dat dit slechts een symbolische schrijfwijze is, aangezien de e_i's vectoren zijn, terwijl de x_i's en y_i's reële getallen zijn. We kunnen dit exact neerschrijven als

$$v \times w = \sum_{i=1}^{3} \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} e_i \,. \tag{7.2}$$

Lemma 7.2.4. *De definitie $v \times w$ is onafhankelijk van de keuze van de positief georiënteerde orthonormale basis $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$.*

Bewijs. Stel dat $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$ een andere positief georiënteerde orthonormale basis is, met Q de matrix van basisovergang; uit Lemma 7.2.2 volgt dat $Q \in \mathsf{SO}(3)$.

Veronderstel nu dat v en w ten opzichte van de nieuwe basis $\mathcal{B}'$ coördinaten $(x_1', x_2', x_3')^t$, respectievelijk $(y_1', y_2', y_3')^t$ hebben. Uit Lemma 5.2.3(iii) volgt (na transponeren) dat

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{pmatrix} Q^t \,, \\ \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_1' & y_2' & y_3' \end{pmatrix} Q^t \,. \end{aligned}$$

Merk verder ook op dat uit $QQ^t = I_3$ volgt dat

$$\begin{pmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{i1} & q_{i2} & q_{i3} \end{pmatrix} Q^t$$

voor elke $i \in \{1, 2, 3\}$. Uiteindelijk verkrijgen we dus

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} e_i &= \sum_{i=1}^{3} \det \left(\begin{pmatrix} q_{i1} & q_{i2} & q_{i3} \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \end{pmatrix} \cdot Q^t \right) e_i \\ &= \det(Q) \cdot \sum_{i=1}^{3} \begin{vmatrix} q_{i1} & q_{i2} & q_{i3} \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \end{vmatrix} e_i \,, \end{aligned}$$

en door deze laatste determinant te ontwikkelen naar de eerste rij, krijgen we

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\begin{vmatrix}\delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix} e_i &= \det(Q)\cdot\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\begin{vmatrix}\delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3}\\ x'_1 & x'_2 & x'_3\\ y'_1 & y'_2 & y'_3\end{vmatrix} q_{ij}e_i\\ &= \det(Q)\cdot\sum_{j=1}^{3}\begin{vmatrix}\delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3}\\ x'_1 & x'_2 & x'_3\\ y'_1 & y'_2 & y'_3\end{vmatrix} f_j\,.\end{aligned}$$

Aangezien $\det(Q) = 1$ zien we dat de definitie

$$v\times w = \sum_{i=1}^{3}\begin{vmatrix}\delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix} e_i$$

inderdaad onafhankelijk is van de keuze van de positief georiënteerde orthonormale basis. □

We illustreren nu het nut van het vectorieel product door een aantal interessante eigenschappen aan te tonen. Zoals we kunnen zien, levert ook het combineren van het inproduct en het vectorproduct nuttige informatie op.

Stelling 7.2.5. *Onderstel dat $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ en $a \in \mathbb{R}$, dan geldt:*

(i) $v \times w = -w \times v$;

(ii) $a(v \times w) = (av) \times w = v \times (aw)$;

(iii) $v \times w = 0 \iff v$ *en* w *zijn lineair afhankelijk;*

(iv) $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$;

(v) [*tripel-product*] $u(v \times w) = (u \times v)w$;

(vi) $v\times w \perp v$ *en* $v\times w \perp w$*, met andere woorden,* $v(v\times w) = w(v\times w) = 0$;

(vii) [*formule van Lagrange*[1]] $u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$;

(viii) [*identiteit van Lagrange*] $(v \times w)^2 = v^2w^2 - (vw)^2$;

(ix) *als* $v \neq 0$ *en* $w \neq 0$*, dan geldt:* $\|v \times w\| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin\angle(v, w)$;

(x) *als* $v \times w \neq 0$*, dan is* $\{v, w, v \times w\}$*, in deze volgorde, een positief georienteerde basis voor* $\mathbb{R}^3$;

[1] Joseph-Louis Lagrange (Giuseppe Lodovico Lagrangia) (1736–1813) was een wiskundige en astronoom van Italiaanse afkomst, die later in Frankrijk en Pruisen werkte. Samen met Leonhard Euler is hij één van de grootste wiskundigen van de 18e eeuw.

(xi) *[Jacobi*[2] *identiteit]* $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$;

(xii) $(u \times v) \times (u \times w) = u(v \times w) \cdot u$;

(xiii) *als* $u \cdot w = v \cdot w$ *én* $u \times w = v \times w$ *met* $w \neq 0$, *dan is* $u = v$.

Bewijs. Beschouw de positief georiënteerde orthonormale standaardbasis voor $\mathbb{R}^3$, en stel $u = (u_1, u_2, u_3)^t$, $v = (v_1, v_2, v_3)^t$ en $w = (w_1, w_2, w_3)^t$.

(i),(ii) Onmiddellijk uit (7.2) en basiseigenschappen van de determinant.

(iii) Uit (7.2) zien we dat $v \times w$ gelijk is aan 0 als en slechts als de drie (2×2)-minoren van de matrix $\left(\begin{smallmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{smallmatrix}\right)$ nul zijn. Dit is equivalent met het feit dat deze matrix niet-maximale rang heeft, of nog, met het feit dat v en w lineair afhankelijk zijn; zie ook Gevolg 5.3.15.

(iv) Dit volgt opnieuw onmiddellijk uit (7.2) en basiseigenschappen van de determinant.

(v), (vi) Uit (7.2) volgt dat

$$u \cdot (v \times w) = \sum_{i=1}^{3} \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_i = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

en analoog is

$$(u \times v) \cdot w = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

De gelijkheid (v) volgt nu omdat deze twee determinanten aan elkaar gelijk zijn via rijverwisselingen. Anderzijds zien we dat

$$v \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0\,,$$

en hieruit volgt (vi).

(vii) Dit is een beetje een vervelende berekening gebruik makend van (7.1). Stel $y = v \times w$, dan is $y = (y_1, y_2, y_3)^t$ met

$$\begin{aligned} y_1 &= v_2 w_3 - v_3 w_2\,, \\ y_2 &= v_3 w_1 - v_1 w_3\,, \\ y_3 &= v_1 w_2 - v_2 w_1\,. \end{aligned}$$

[2]Genoemd naar Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851).

Stel nu $z = u \times y$, dan is $z = (z_1, z_2, z_3)^t$ met

$$\begin{aligned}
z_1 &= u_2 y_3 - u_3 y_2 = u_2 v_1 w_2 - u_2 v_2 w_1 - u_3 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_3 \,, \\
z_2 &= u_3 y_1 - u_1 y_3 = u_3 v_2 w_3 - u_3 v_3 w_2 - u_1 v_1 w_2 + u_1 v_2 w_1 \,, \\
z_3 &= u_1 y_2 - u_2 y_1 = u_1 v_3 w_1 - u_1 v_1 w_3 - u_2 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_2 \,.
\end{aligned}$$

Stel ten slotte $x = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w = (x_1, x_2, x_3)$, dan vinden we

$$\begin{aligned}
x_1 &= (u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3) v_1 - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) w_1 \,, \\
x_2 &= (u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3) v_2 - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) w_2 \,, \\
x_3 &= (u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3) v_3 - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) w_3 \,;
\end{aligned}$$

we stellen vast dat de vectoren z en x inderdaad aan elkaar gelijk zijn.

(viii) Hoewel de identiteit van Lagrange ook gemakkelijk rechtstreeks kan aangetoond worden met behulp van (7.1), zullen we ze trachten af te leiden uit reeds eerder bewezen eigenschappen. We vinden

$$\begin{aligned}
(v \times w)^2 &= (v \times w)(v \times w) \\
&= ((v \times w) \times v) \cdot w && \text{(wegens (v) met } u = v \times w) \\
&= -(v \times (v \times w)) \cdot w && \text{(wegens (i))} \\
&= \big((v \cdot v)w - (v \cdot w)v\big) \cdot w && \text{(wegens (vii))} \\
&= (v \cdot v)(w \cdot w) - (v \cdot w)(v \cdot w) \\
&= v^2 w^2 - (v \cdot w)^2 \,.
\end{aligned}$$

(ix) Dit volgt onmiddellijk uit de identiteit van Lagrange, aangezien per definitie van de hoek $vw = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \angle(v, w)$, en bijgevolg

$$\begin{aligned}
\|v \times w\|^2 &= \|v\|^2 \, \|w\|^2 - \|v\|^2 \, \|w\|^2 \cos^2 \angle(v, w) \\
&= \|v\|^2 \, \|w\|^2 \sin^2 \angle(v, w) \,.
\end{aligned}$$

(x) Aangezien $v \times w \neq 0$ zijn v en w lineair onafhankelijk, en omdat $v \times w$ orthogonaal staat op zowel v als w is het drietal $\{v, w, v \times w\}$ lineair onafhankelijk en vormt bijgevolg een basis voor $\mathbb{R}^3$. Stel $v \times w = (y_1, y_2, y_3)^t$; dan wordt de matrix van basisovergang van de positief georiënteerde basis naar deze basis gegeven door

$$Q = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & y_1 \\ v_2 & w_2 & y_2 \\ v_3 & w_3 & y_3 \end{pmatrix},$$

en de determinant van deze matrix is precies het tripel-product van de drie vectoren v, w en $v \times w$. We bekomen

$$\det(Q) = (v \times w)(v \times w) = (v \times w)^2 > 0 \,,$$

en bijgevolg is de basis $\{v, w, v \times w\}$ positief georiënteerd.

(xi) Om de Jacobi identiteit aan te tonen, volstaat het om drie keer de formule van Lagrange toe te passen en de vergelijkingen op te tellen:

$$\begin{aligned} u \times (v \times w) &= (u \cdot w)v - (u \cdot v)w\,, \\ v \times (w \times u) &= (v \cdot u)w - (v \cdot w)u\,, \\ w \times (u \times v) &= (w \cdot v)u - (w \cdot u)v\,. \end{aligned}$$

We zien dat de som van de drie rechterleden inderdaad 0 is.

(xii) We vertrekken opnieuw van de formule van Lagrange, en we maken gebruik van (v) en (vi):

$$\begin{aligned} (u \times v) \times (u \times w) &= \big((u \times v) \cdot w\big)u - \big((u \times v) \cdot u\big)w \\ &= \big(u \cdot (v \times w)\big)u\,. \end{aligned}$$

(xiii) Veronderstel dat $u \cdot w = v \cdot w$ en $u \times w = v \times w$. Dan is $(u-v) \cdot w = 0$ en $(u-v) \times w = 0$, en bijgevolg staat de vector $u-v$ enerzijds orthogonaal op w, terwijl anderzijds $u - v$ en w lineair afhankelijk zijn. Dit kan enkel als $u - v = 0$, en dus $u = v$. □

Opmerkingen 7.2.6. (i) Het tripel-product van drie vectoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ wordt ook soms genoteerd als $\{u\ v\ w\}$. Zoals we hebben aangetoond in het bewijs van Stelling 7.2.5(v), is het tripel-product van drie vectoren gelijk aan de determinant van de matrix waarvan de rijen (of kolommen) bestaan uit de coördinaten van de respectieve vectoren ten opzichte van een positief georiënteerde orthonormale basis. Uit de eigenschappen van determinanten kan men bijgevolg bijkomende eigenschappen afleiden over het tripel-product.

(ii) Uit het voorgaande volgt dat we het vectorieel product van twee vectoren v en w ook nog intrinsiek (dus zonder gebruik te maken van coördinaten) als volgt kunnen definiëren: Als de vectoren lineair afhankelijk zijn, is hun vectorieel product gelijk aan nul. In het andere geval stellen we $v \times w$ gelijk aan de unieke vector die voldoet aan:

(a) hij staat loodrecht op v en op w;

(b) zijn lengte is gelijk aan $\|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin \angle(v, w)$;

(c) $\{v, w, v \times w\}$ vormt een positief georiënteerde basis van $\mathbb{R}^3$.

Ga zelf na dat dit de vector $v \times w$ uniek bepaalt, en dat dit overeenkomt met de eerdere definitie van het vectorieel product.

(iii) Noch het inproduct, noch het vectorieel product, voldoen aan een schrappingswet, m.a.w. noch uit $u \cdot w = v \cdot w$, noch uit $u \times w = v \times w$, kan men besluiten dat $u = v$ indien $w \neq 0$. Zie echter Stelling 7.2.5(xiii).

(iv) Eigenschap (i) samen met de Jacobi identiteit (xi) tonen aan dat het vectorieel product aan de vectorruimte $\mathbb{R}^3$ de structuur geven van een zogenaamde *Lie algebra*. In feite valt deze Lie algebra samen met de Lie algebra afkomstig van de Lie groep $\mathsf{SO}(3)$.

(v) De natuurlijke vraag dringt zich op of er gelijkaardige vectoriële producten kunnen gedefinieerd worden in $\mathbb{R}^n$ voor $n \neq 3$. In elk geval willen we dat een dergelijk vectorproduct, behalve aan de zeer natuurlijke eigenschappen (i)–(iv), ook nog voldoet aan (vi) en aan eigenschap (ix), of equivalent hiermee, aan de identiteit van Lagrange. Verrassend genoeg kan men aantonen dat een dergelijk vectorieel product enkel kan bestaan in dimensies 3 en 7! De diepere reden hiervoor is het feit dat zogenaamde genormeerde delingsalgebra's over $\mathbb{R}$ enkel bestaan in dimensies 1 ($\mathbb{R}$), 2 ($\mathbb{C}$), 4 ($\mathbb{H}$, de *quaternionen*) en 8 ($\mathbb{O}$, de *octonen*). Binnen het raam van deze cursus kunnen we hier niet verder op ingaan.

(vi) Het is wel mogelijk om een willekeurige n-dimensionale vectorruimte V uit te breiden tot zijn zogenaamde *uitwendige algebra* $\Lambda(V)$, en in deze algebra kunnen we dus wel vectoren vermenigvuldigen met elkaar. Het product van twee vectoren v en w van V is nu geen vector, maar een *bi-vector* $v \wedge w$. Als $n = 3$ kunnen we met deze bi-vector een gewone vector laten overeenkomen door de *Hodge dualiteit* toe te passen, en het resultaat is precies het vectorieel product: $v \times w = *(v \wedge w)$.

7.3 Affiene deelruimten in $\mathbb{R}^n$

We beginnen nu onze studie van de zogenaamde affiene meetkunde; we herinneren de lezer aan Definitie 2.5.7 waar we affiene deelruimten hebben ingevoerd (in willekeurige K-vectorruimten). In het vervolg beperken we ons tot reële vectorruimten, waar de begrippen een vertrouwde betekenis hebben.

We zullen vooreerst de affiene deelruimten van $\mathbb{R}^n$ nader bestuderen en meetkundig interpreteren. Affiene deelruimten van enkele specifieke dimensies geven we meetkundige benamingen.

Definitie 7.3.1. Beschouw de vectorruimte $\mathbb{R}^n$ met $n \geq 2$.

(i) Een affiene deelruimte van dimensie 0 noemen we een *punt*.

(ii) Een affiene deelruimte van dimensie 1 noemen we een *rechte*.

(iii) Een affiene deelruimte van dimensie 2 noemen we een *vlak*.

(iv) Een affiene deelruimte van dimensie $n - 1$ noemen we een *hypervlak*.

In $\mathbb{R}^3$ zijn vlakken en hypervlakken dezelfde objecten. We zeggen ook dat een hypervlak *codimensie* gelijk aan 1 heeft.

Definitie 7.3.2. Beschouw de vectorruimte $\mathbb{R}^n$. Een affiene deelruimte van $\mathbb{R}^n$ wordt ook wel een *Euclidische deelruimte* van $\mathbb{R}^n$ genoemd.

(i) Zij D een affiene deelruimte van $\mathbb{R}^n$. Wegens Lemma 2.5.10 bestaat er een unieke deelruimte $W \leq \mathbb{R}^n$ waarvoor $D = v + W$ voor een $v \in \mathbb{R}^n$. We noemen W de *geassocieerde vectordeelruimte* of de *onderliggende vectordeelruimte* van D en noteren $W =: D_0$. We zeggen dat D een *getranslateerde* is van W.

(ii) Zij $D = v + D_0$ met $D_0 \leq \mathbb{R}^n$. Elke vector in D noemen we een *plaatsvector* van D. Elke vector in D_0 noemen we een *richtingsvector* van D.

Aangezien iedere 1-dimensionale deelruimte van de vorm $\{\lambda w \mid \lambda \in K\}$ is, kunnen we een rechte voorstellen als

$$D = \{v + \lambda w \mid \lambda \in K\}$$

voor zekere $v \in \mathbb{R}^n$ en $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Hierbij is v een plaatsvector van D, en is w een richtingsvector, zodat dus $D_0 = \{\lambda w \mid \lambda \in K\}$.

Het is duidelijk dat een affiene deelruimte D van dimensie k uniek bepaald is door 1 plaatsvector en k lineair onafhankelijke richtingsvectoren.

Opmerking 7.3.3. Hoewel we hier spreken over affiene deelruimten, hebben we in feite nog niet vermeld wat we verstaan onder de *affiene ruimte*. We willen hier niet al te diep ingaan op de algemene axiomatische definitie van deze structuren, maar wegens hun belang in ondermeer de fysica (bijvoorbeeld mechanica en kinematica) willen we hier toch even een aantal aspecten nader toelichten.

Een affiene ruimte is een verzameling E van elementen die we punten noemen. In tegenstelling tot vectorruimten geven we aan geen enkel punt een bijzondere rol; een affiene ruimte heeft dus geen "oorsprong". Wel veronderstellen we dat de *onderlinge ligging* van de punten gemodelleerd is op een vectorruimte V: elk koppel (a, b) van elementen van E bepaalt een element van V, dat we als $\overrightarrow{ab}$ noteren[3], zodanig dat $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$. De elementen van V worden in deze context *vrije vectoren* van E genoemd. Meer bepaald is

[3]Formeel betekent dit dat we een afbeelding $\theta\colon E \times E \to V$ beschouwen, en we definiëren vervolgens $\overrightarrow{ab} := \theta(a, b)$. We eisen hierbij bovendien dat voor elke $a \in E$ de afbeeldingen $p \mapsto \theta(a, p)$ en $p \mapsto \theta(p, a)$ beide bijectief zijn.

elke vrije vector een equivalentieklasse van equipollente[4] koppels van punten van E, en voor elke $a \in E$ bestaat er een unieke[5] $b \in E$ zodat $\overrightarrow{ab}$ gelijk is aan de gegeven (vrije) vector.

Wanneer we nu een specifiek punt $o \in E$ uitkiezen, bepaalt elk ander punt een vector, en omgekeerd bepaalt elke (vrije) vector $v \in V$ een uniek punt a van E zodat $v = \overrightarrow{oa}$. De *gepunte ruimte* E_o, i.e. de verzameling E samen met het uitverkoren punt o, krijgt op die manier de structuur van een vectorruimte, en die vectorruimte is isomorf met de onderliggende vectorruimte V.

In deze terminologie is een plaatsvector van een affiene deelruimte dus een *gebonden vector*, i.e. de vector hangt af van de keuze van de oorsprong o; anderzijds zijn de richtingsvectoren vrije vectoren, die niet afhangen van de keuze van o.

We bewijzen een meetkundige karakterisatie van affiene deelruimten.

Lemma 7.3.4. *Beschouw de vectorruimte $\mathbb{R}^n$. Een deelverzameling $D \subseteq \mathbb{R}^n$ is een affiene deelruimte van $\mathbb{R}^n$ als en slechts als*

$$y + a(z - y) \in D \quad \textit{voor alle } y, z \in D \textit{ en alle } a \in \mathbb{R}\,. \tag{7.3}$$

Meetkundig zegt dit dus precies dat een deelverzameling $D \subseteq \mathbb{R}^n$ een affiene deelruimte is, dan en slechts dan als elke rechte door 2 punten van D volledig in D ligt.

Bewijs. Veronderstel eerst dat $D \subseteq \mathbb{R}^n$ een affiene deelruimte is van $\mathbb{R}^n$; per definitie is dan $D = W + v$ voor een zekere deelruimte W en een $v \in \mathbb{R}^n$. Neem $y, z \in D$ en $a \in \mathbb{R}$ willekeurig. Stel $y = w_y + v$ en $z = w_z + v$ met $w_y, w_z \in W$; dan is

$$\begin{aligned} y + a(z - y) &= (1 - a)(w_y + v) + a(w_z + v) \\ &= (1 - a)w_y + aw_z + v \in W + v = D\,, \end{aligned}$$

en dus is (7.3) inderdaad voldaan.

Veronderstel omgekeerd dat (7.3) geldt. Neem $y \in D$ willekeurig; we zullen aantonen dat de verzameling $D - y := \{d - y \mid d \in D\}$ een (vector)deelruimte is van $\mathbb{R}^n$, en hieruit volgt dan dat D een affiene deelruimte is. Neem dus $v, w \in D - y$ en $a \in \mathbb{R}$ willekeurig; we moeten enerzijds aantonen dat $v + w \in D - y$, en anderzijds dat $av \in D - y$. Stel dus $v = d_v - y$ en $w = d_w - y$ met $d_v, d_w \in D$; dan is

$$av = \big(y + a(d_v - y)\big) - y \in D - y\,.$$

[4]Twee koppels van punten (a, b) en (c, d) worden *equipollent* genoemd als hun beeld onder θ gelijk is, m.a.w. als $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd}$.

[5]Dit volgt precies uit de hierboven vermelde bijectiviteit.

Anderzijds is

$$(v+w)/2 = (d_v - y + d_w - y)/2 = \big(d_v + \tfrac{1}{2}(d_w - d_v)\big) - y \in D - y\,,$$

en omdat we reeds hebben aangetoond dat $D - y$ gesloten is onder scalaire vermenigvuldiging, volgt hieruit dat ook $v + w \in D - y$. □

In Lemma 2.5.13 toonden we aan dat de oplossing van een niet-strijdig stelsel vergelijkingen steeds een affiene deelruimte is. We tonen hier aan dat het omgekeerde ook geldig is.

Stelling 7.3.5. *Zij D een affiene deelruimte in de Euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$, en stel* $\dim D = d$. *Dan geldt:*

(i) *D is gelijk aan de oplossingsverzameling van een stelsel van $n-d$ lineaire vergelijkingen in n onbekenden over $\mathbb{R}$.*

(ii) *Stel dat $D = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = w\}$, dan is $D_0 = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}$.*

Bewijs. Zij $D = v + D_0$ met $D_0 \leq \mathbb{R}^n$ de geassocieerde vectordeelruimte en $v \in \mathbb{R}^n$. We maken gebruik van het orthogonaal complement $(D_0)^\perp$ van de vectordeelruimte D_0 met betrekking tot het standaard inproduct op $\mathbb{R}^n$; zie Definitie 4.2.1(iii).

Wegens Lemma 4.2.5 is $\dim (D_0)^\perp = n - d$. Zij dus $\{b_1, \ldots, b_{n-d}\}$ een basis van $(D_0)^\perp$. We tonen eerst aan dat $w \in D_0$ als en slechts dan als $w \cdot b_i = 0$ voor alle $i = 1, \ldots, n-d$.

Als $w \in D_0$, dan is per definitie $w \cdot b_i = 0$ voor alle $b_i \in (D_0)^\perp$. Omgekeerd, als voor een bepaalde $w \in \mathbb{R}^n$ geldt dat $w \cdot b_i = 0$ voor alle $i = 1, \ldots, n-d$, dan is $w \cdot b = 0$ voor alle $b \in (D_0)^\perp$, en bijgevolg is $w \in ((D_0)^\perp)^\perp$; uit Gevolg 4.2.6 volgt dat $w \in D_0$.

Merk vervolgens op dat $z \in D$ als en slechts als $z - v \in D_0$. Wegens de vorige paragraaf hebben we dus dat $z \in D$ als en slechts als $z \cdot b_i = v \cdot b_i$ voor alle $i \in \{1, \ldots, n-d\}$. We drukken nu deze laatste uitdrukking uit in coördinaten.

Zij $b_i = (b_{i1}, \ldots, b_{in})^t \in \mathbb{R}^n$ en $c_i = v \cdot b_i \in \mathbb{R}$ voor alle $i = 1, \ldots, n-d$. Dan is $z = (z_1, \ldots, z_n)^t \in \mathbb{R}^n$ een element van D als en slechts als

$$\begin{cases} b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \cdots + b_{1n}z_n = c_1 \\ \qquad\vdots \\ b_{n-d,1}z_1 + b_{n-d,2}z_2 + \cdots + b_{n-d,n}z_n = c_{n-d}\,. \end{cases}$$

Hieruit volgt dat D gelijk is aan de oplossingsverzameling van een stelsel van $n-d$ lineaire vergelijkingen in n onbekenden; dit bewijst (i). Aangezien D_0 precies bestaat uit de elementen z zodat $z \cdot b_i = 0$, volgt ook (ii). □

Opmerking 7.3.6. Het bewijs van voorgaande stelling geeft ons ook een methode om, gegeven een affiene deelruimte, een stelsel te bepalen waarvan deze affiene ruimte de oplossingsverzameling is. Bemerk dat dit stelsel zeker niet uniek is.

Als bijzonder geval kunnen we enerzijds de hypervlakken een eenvoudige beschrijving geven, en anderzijds een interessante meetkundige interpretatie bekomen van de voorgaande stelling.

Gevolg 7.3.7. (i) *Zij H een hypervlak in $\mathbb{R}^n$. Dan bestaan er reële getallen $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ zodat*

$$H = \{(x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + b = 0\}.$$

(ii) *Zij D een affiene deelruimte van dimensie d. Dan bestaan er $n-d$ hypervlakken $H_1, \ldots, H_{n-d}$ zodanig dat $D = H_1 \cap \cdots \cap H_{n-d}$.*

Bewijs. (i) Uit Stelling 7.3.5 volgt dat een $(n-1)$-dimensionale affiene deelruimte de oplossingsverzameling is van $n-(n-1) = 1$ lineaire vergelijking.

(ii) Aangezien een d-dimensionale affiene deelruimte de oplossingsverzameling van $n-d$ lineaire vergelijkingen is, volgt het gestelde uit (i). □

Het is duidelijk dat er door twee verschillende punten in $\mathbb{R}^3$ een rechte gaat. We veralgemenen dit feit naar k punten in $\mathbb{R}^n$.

Lemma 7.3.8. *Beschouw k punten $p_1, \ldots, p_k$ in $\mathbb{R}^n$. Dan is, voor alle $i, j = 1, \ldots, k$,*

$$p_i + \operatorname{span}(p_1 - p_i, \ldots, p_k - p_i) = p_j + \operatorname{span}(p_1 - p_j, \ldots, p_k - p_j).$$

Stel dat D een affiene deelruimte is met $p_1, \ldots, p_k \in D$, dan geldt er dat $p_1 + \operatorname{span}(p_2 - p_1, \ldots, p_k - p_1) \subseteq D$.

Bewijs. Vermits $p_\ell - p_j = (p_\ell - p_i) - (p_j - p_i)$ voor alle $\ell, i, j = 1, \ldots, k$, geldt dat $\operatorname{span}(p_1 - p_i, \ldots, p_k - p_i) = \operatorname{span}(p_1 - p_j, \ldots, p_k - p_j)$. Aangezien $p_i - p_j \in \operatorname{span}(p_1 - p_j, \ldots, p_k - p_j)$, volgt er nu uit Lemma 2.5.10 dat

$$p_i + \operatorname{span}(p_1 - p_i, \ldots, p_k - p_i) = p_j + \operatorname{span}(p_1 - p_j, \ldots, p_k - p_j).$$

Stel vervolgens dat $p_1, \ldots, p_k \in D$; dan is $D = p_1 + D_0$. Hieruit volgt dat $p_2 - p_1, \ldots, p_k - p_1 \in D_0$, dus is ook $\operatorname{span}(p_2 - p_1, \ldots, p_k - p_1) \subseteq D_0$. Hieruit volgt het gestelde. □

Definitie 7.3.9. Beschouw k punten $p_1, \ldots, p_k$ in $\mathbb{R}^n$. Dan noemen we de affiene deelruimte

$$p_1 + \text{span}(p_2 - p_1, \ldots, p_k - p_1)$$

de *affiene deelruimte bepaald door* of *opgespannen door* de punten $p_1, \ldots, p_k$. Uit Lemma 7.3.8 volgt dat dit de kleinste affiene deelruimte is die de punten $p_1, \ldots, p_k$ bevat.

Opmerking 7.3.10. We hebben $\dim(p_1+\text{span}(p_2-p_1, \ldots, p_k-p_1)) \leq k-1$; de gelijkheid geldt als en slechts dan als de verzameling van richtingsvectoren $\{p_2 - p_1, \ldots, p_k - p_1\}$ lineair onafhankelijk is.

We definiëren wanneer twee affiene deelruimten parallel zijn:

Definitie 7.3.11. (i) Zij $D = v + D_0$ een affiene deelruimte van V. Een vector $w \in V$ noemen we *parallel* aan D, als en slechts als $w \in D_0$; we noteren dit als $w \parallel D$.

(ii) Beschouw twee affiene deelruimten $D = v + D_0$ en $D' = v' + D_0'$ van V. Dan noemen we D en D' parallel aan elkaar als en slechts als $D_0 \leq D_0'$ of $D_0' \leq D_0$. We noteren dit met $D \parallel D'$.
In het bijzonder zijn twee affiene deelruimten D en D' van dezelfde dimensie parallel aan elkaar als en slechts dan als $D_0 = D_0'$.

Anderzijds veralgemenen we ook het begrip van orthogonale vectoren, dat we hebben ingevoerd in Definitie 4.2.1, tot willekeurige affiene deelruimten van de Euclidische deelruimte $\mathbb{R}^n$.

Definitie 7.3.12. (i) Zij $D = v + D_0$ een affiene deelruimte van $\mathbb{R}^n$. We zeggen dat een vector $w \in \mathbb{R}^n$ *orthogonaal op* D staat als en slechts als w orthogonaal staat op elke vector van D_0; we noteren dit als $w \perp D$.

(ii) Beschouw twee affiene deelruimten $D = v + D_0$ en $D' = v' + D_0'$ van V. Dan staan D en , D' orthogonaal op elkaar als en slechts dan als elke vector van D_0 loodrecht staat op elke vector van D_0'. We noteren dit met $D \perp D'$.

Stel dat $D \perp D'$, dan is noodzakelijk $D_0 \cap D_0' = \{0\}$. Immers, in de Euclidische ruimte is de nulvector het enige element dat orthogonaal op zichzelf staat.

7.4 Hypervlakken in $\mathbb{R}^n$

Een hypervlak in $\mathbb{R}^n$ is een affiene deelruimte van dimensie $n - 1$.

Definitie 7.4.1. Zij H een hypervlak in $\mathbb{R}^n$. Uit Gevolg 7.3.7 volgt dat H van de vorm

$$H = \{(x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0\}$$

is, voor zekere vaste reële getallen $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$. Wanneer we de vector $(a_1, \ldots, a_n)^t \in \mathbb{R}^n$ noteren als $\mathfrak{n}$, kunnen we de vergelijking van H herschrijven als

$$H = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \mathfrak{n} \cdot v + b = 0\}.$$

Elke niet-nul vector $\mathfrak{m}$ met $\mathfrak{m} \perp H$ (of equivalent, $\mathfrak{m} \perp H_0$) noemen we een *normaalvector* voor H.

Zij H gegeven door de vergelijking $\mathfrak{n} \cdot v + b = 0$. Er volgt dat $\mathfrak{n} \perp H_0$, en aangezien $\dim(H_0)^\perp = n - (n-1) = 1$, volgt dat iedere normaalvector van H een scalair veelvoud van $\mathfrak{n}$ is.

Lemma 7.4.2. *Beschouw in $\mathbb{R}^n$ een niet-nul vector $\mathfrak{n} = (a_1, \ldots, a_n)^t$, en een willekeurig punt $p = (p_1, \ldots, p_n)^t$. Dan is er een uniek hypervlak met normaalvector $\mathfrak{n}$ dat het punt p bevat.*

Bewijs. Alle hypervlakken met normaalvector $\mathfrak{n}$ hebben de gedaante

$$H = \{(x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0\}$$

voor een zekere $b \in \mathbb{R}$. Het is nu duidelijk dat de voorwaarde $p \in H$ het getal b uniek bepaalt; we krijgen $b = -(a_1p_1 + \cdots + a_np_n)$, en bijgevolg kunnen we de vergelijking van H herschrijven als

$$H = \{(x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n \mid a_1(x_1 - p_1) + \cdots + a_n(x_n - p_n) = 0\},$$

of nog, in vectoriële notatie,

$$H = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \mathfrak{n} \cdot (v - p) = 0\}. \qquad \square$$

Lemma 7.4.3. *Beschouw in $\mathbb{R}^n$ twee hypervlakken*

$$\begin{aligned} H &= \{v \in \mathbb{R}^n \mid \mathfrak{n} \cdot v + b = 0\} \text{ en} \\ H' &= \{v \in \mathbb{R}^n \mid \mathfrak{n}' \cdot v + b' = 0\}. \end{aligned}$$

Dan is $H \parallel H'$ als en slechts als $\mathfrak{n}$ en $\mathfrak{n}'$ lineair afhankelijk zijn.

Bewijs. Omdat $\dim(H) = \dim(H')$, is $H \parallel H'$ als en slechts als $H_0 = H'_0$, waarbij $H_0 = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \mathfrak{n} \cdot v = 0\}$ en $H'_0 = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \mathfrak{n}' \cdot v = 0\}$. Als $\mathfrak{n}$ en $\mathfrak{n}'$ evenredig zijn, dan is uiteraard $H_0 = H'_0$. Omgekeerd, als $H_0 = H'_0$ dan zijn $\mathfrak{n}$ en $\mathfrak{n}'$ normaalvectoren van hetzelfde hypervlak, en bijgevolg zijn ze evenredig aan elkaar. $\square$

Als $n > 2$, dan kunnen twee hypervlakken nooit orthogonaal op elkaar staan. Stel immers dat $H \perp H'$; dan volgt uit de dimensiestelling dat

$$\dim(H_0 + H_0') = (n-1) + (n-1) - 0 = 2n - 2 > n,$$

een tegenstrijdigheid. Nochtans definiëren we hieronder orthogonale hypervlakken; we benadrukken dat deze definitie *niet* conform is met Definitie 7.3.12, maar dat er precies door deze beschouwingen geen verwarring mogelijk is. (In het geval $n = 2$ blijken beide begrippen met elkaar samen te vallen.)

Definitie 7.4.4. We zeggen dat twee hypervlakken H en H' van $\mathbb{R}^n$ *orthogonaal op elkaar* staan, als en slechts als hun normaalvectoren orthogonaal op elkaar staan.

Aangezien normaalvectoren op een evenredigheidsfactor na uniek bepaald zijn, is deze definitie onafhankelijk van de gekozen normaalvectoren.

We veralgemenen de definitie van orthogonale hypervlakken en definiëren de hoek tussen twee hypervlakken.

Definitie 7.4.5. We definiëren de *hoek* tussen twee hypervlakken als de *kleinste* hoek ingesloten door hun normaalvectoren.

Merk op dat de hoek $\alpha = \angle(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}')$ onveranderd blijft als we $\mathfrak{n}$ of $\mathfrak{n}'$ vervangen door een positief veelvoud, maar verandert in $\pi - \alpha$ als we $\mathfrak{n}$ of $\mathfrak{n}'$ vervangen door een negatief veelvoud. (Indien we beide vervangen door een negatief veelvoud bekomen we uiteraard opnieuw α.) De kleinste hoek is dus ofwel α, ofwel $\pi - \alpha$, en is bijgevolg steeds bevat in het interval $[0, \pi/2]$. Indien de hoek 0 is, zijn de hypervlakken parallel aan elkaar; indien de hoek $\pi/2$ is, zijn ze orthogonaal aan elkaar.

Lemma 7.4.6. *Beschouw in $\mathbb{R}^n$ twee hypervlakken H en H', met respectieve normaalvectoren $\mathfrak{n}$ en $\mathfrak{n}'$. Dan is*

$$\angle(H, H') = \arccos \frac{|\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n}'|}{\|\mathfrak{n}\| \cdot \|\mathfrak{n}'\|} .$$

Bewijs. Aangezien $\arccos(-t) = \pi - \arccos(t)$ voor alle $t \in [-1, 1]$, en arccos de waarden $[0, \pi/2]$ aanneemt op het interval $[0, 1]$, volgt deze formule uit de definities. □

7.5 Toepassingen

In deze sectie bekijken we verscheidene toepassingen van de voorgaande secties. We bestuderen een aantal resultaten in verband met de onderlinge ligging van rechten, vlakken en hypervlakken in $\mathbb{R}^n$.

Lemma 7.5.1. *Zij H een hypervlak met normaalvector $\mathfrak{n}$, en L een rechte met richtingsvector r. Dan is $L \perp H$ als en slechts als $\mathfrak{n}$ en r lineair afhankelijk zijn.*

Bewijs. Per definitie is $L \perp H$ als en slechts als elke vector van L_0 orthogonaal is met elke vector van H_0. De vectoren van L_0 zijn precies de scalaire veelvouden van r, en een vector staat loodrecht op $H_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot \mathfrak{n} = 0\}$ als en slechts als hij evenredig is met een (willekeurige) normaalvector van H. Dit bewijst het gestelde. $\square$

Merk op dat in $\mathbb{R}^3$ geldt dat twee vectoren lineair afhankelijk zijn als en slechts als hun vectorieel product 0 is. In $\mathbb{R}^3$ bekomen we dus dat $L \perp H$ als en slechts als $\mathfrak{n} \times r = 0$.

In Definitie 4.1.1 definieerden we de afstand tussen twee vectoren in een inproduct-ruimte. We willen deze definitie nu uitbreiden tot de afstand tussen twee willekeurige affiene deelruimten.

Definitie 7.5.2. (i) Zij D en D' twee affiene deelruimten in $\mathbb{R}^n$. We definieren de afstand tussen D en D' als de kortst mogelijke afstand tussen een punt van D en een punt van D'. We noteren dit als $\operatorname{dist}(D, D')$.

(ii) Zij $D = q + D_0$, en zij $p \in \mathbb{R}^n \setminus D$ een punt niet op D gelegen. De loodlijn uit p op D is de rechte met als plaatsvector p en als richtingsvector $\operatorname{proj}_{D_0^\perp}(p - q)$, waarbij $\operatorname{proj}_{D_0^\perp}$ de orthogonale projectie is op $D_0^\perp$ zoals gedefinieerd in Definitie 4.2.8.

Stelling 7.5.3. *Zij $D = q + D_0$, zij $p \in \mathbb{R}^n \setminus D$, en zij L de loodlijn uit p op D. Dan geldt:*

(i) *De rechte L staat loodrecht op D, en*

$$L \cap D = \{q + \operatorname{proj}_{D_0}(p - q)\} = \{p - \operatorname{proj}_{D_0^\perp}(p - q)\}.$$

(ii) $\operatorname{dist}(p, D) = \operatorname{dist}(p, L \cap D) = \|\operatorname{proj}_{D_0^\perp}(p - q)\|$.

(iii) *De rechte L is de unieke rechte door p, loodrecht op D, met $L \cap D \neq \emptyset$.*

Bewijs. (i) Aangezien L een richtingsvector heeft in $D_0^\perp$, staat L loodrecht op D. We bepalen nu $L \cap D$. Merk op dat

$$p - q = \operatorname{proj}_{D_0}(p - q) + \operatorname{proj}_{D_0^\perp}(p - q).$$

We hebben nu enerzijds dat $q + \operatorname{proj}_{D_0}(p - q) \in q + D_0 = D$, terwijl anderzijds $q + \operatorname{proj}_{D_0}(p - q) = p - \operatorname{proj}_{D_0^\perp}(p - q) \in L$. Aangezien $p \notin D$ is $L \not\subseteq D$, en we besluiten dat $L \cap D = \{q + \operatorname{proj}_{D_0}(p - q)\}$.

(ii) Zij $w \in D \setminus \{q + \mathrm{proj}_{D_0}(p-q)\}$; dan is $w - q \in D_0 \setminus \{\mathrm{proj}_{D_0}(p-q)\}$. We passen Stelling 4.2.10 toe en bekomen

$$\mathrm{dist}(p-q, w-q) > \mathrm{dist}(p-q, \mathrm{proj}_{D_0}(p-q)).$$

Dit is equivalent met

$$\mathrm{dist}(p, w) > \mathrm{dist}(p, q + \mathrm{proj}_{D_0}(p-q)) = \mathrm{dist}(p, L \cap D),$$

waaruit volgt dat $\mathrm{dist}(p, D) = \mathrm{dist}(p, L \cap D)$. Merk ten slotte op dat

$$\mathrm{dist}(p, L \cap D) = \|p - (p - \mathrm{proj}_{D_0^\perp}(p-q))\| = \|\mathrm{proj}_{D_0^\perp}(p-q)\|.$$

(iii) Zij M een willekeurige rechte door p, loodrecht op D, met $M \cap D \neq \emptyset$; stel $M \cap D = \{z\}$. Dan is $M \subseteq p + D_0^\perp$, zodat $z \in (p + D_0^\perp) \cap D$. Maar dan is $D = z + D_0$ en $p + D_0^\perp = z + D_0^\perp$, waaruit volgt dat

$$(p + D_0^\perp) \cap D = (z + D_0^\perp) \cap (z + D_0) = z + (D_0^\perp \cap D_0) = \{z\}.$$

Hieruit volgt dat z niet afhangt van de keuze van M, en bijgevolg is M de unieke rechte is door p en dit punt z. $\square$

We bestuderen nu het specifieke geval van de loodlijn uit een punt op een hypervlak en de afstand van een punt tot een hypervlak in $\mathbb{R}^n$.

Lemma 7.5.4. *Zij H een hypervlak met vergelijking $\mathfrak{n} \cdot v + b = 0$, en p een punt in $\mathbb{R}^n \setminus H$. Dan geldt:*

(i) *De loodlijn vanuit p op H wordt gegeven door*

$$L = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (v - p) \textit{ en } \mathfrak{n} \textit{ zijn lineair afhankelijk}\}.$$

(ii) *De afstand van p tot H is gelijk aan*

$$\mathrm{dist}(p, H) = \frac{|\mathfrak{n} \cdot p + b|}{\|\mathfrak{n}\|}.$$

Bewijs. (i) Zij L de loodlijn vanuit p op H. Aangezien $L \perp H$, volgt uit Lemma 7.5.1 dat $\mathfrak{n}$ een richtingsvector is voor L, en aangezien uiteraard p een plaatsvector is, wordt een willekeurige vector van L gegeven door $v = p + \lambda\mathfrak{n}$ met $\lambda \in \mathbb{R}$. Dit is equivalent met

$$L = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (v - p) \text{ en } \mathfrak{n} \text{ zijn lineair afhankelijk}\}.$$

(ii) We passen Stelling 7.5.3(ii) toe. Zij $q \in H$ willekeurig; dan is $H = q + H_0$, en $q \cdot \mathfrak{n} + b = 0$. Merk op dat $H_0^\perp = \mathbb{R}\mathfrak{n}$; bijgevolg is $\{\mathfrak{n}/\|\mathfrak{n}\|\}$ een orthonormale basis voor $H_0^\perp$. We kunnen de projectie op $H_0^\perp$ nu bepalen met behulp van Lemma 4.2.9(ii), en we vinden

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(p,H) &= \|\operatorname{proj}_{H_0^\perp}(p-q)\| \\ &= \left\| \left((p-q) \cdot \frac{\mathfrak{n}}{\|\mathfrak{n}\|} \right) \frac{\mathfrak{n}}{\|\mathfrak{n}\|} \right\| \\ &= \frac{|p \cdot \mathfrak{n} - q \cdot \mathfrak{n}|}{\|\mathfrak{n}\|} = \frac{|p \cdot \mathfrak{n} + b|}{\|\mathfrak{n}\|}. \qquad \square\end{aligned}$$

We bestuderen nu de loodlijn uit een punt op een rechte en de afstand van een punt tot een rechte in $\mathbb{R}^n$. We bekijken eerst even het geval $n = 3$ apart, en geven nadien het resultaat voor algemene n.

Lemma 7.5.5. *Zij p een punt in $\mathbb{R}^3$, en zij M een rechte met plaatsvector q en richtingsvector r. Veronderstel dat $p \notin M$. Dan is*

$$\operatorname{dist}(p,M) = \frac{\|r \times (p-q)\|}{\|r\|}.$$

Bewijs. Zij y de projectie van p op de rechte M. Door de driehoek met hoekpunten p, q en y te beschouwen, vinden we

$$\sin \angle(r, p-q) = \operatorname{dist}(p,y)/\operatorname{dist}(q,p),$$

en dus halen we uit Stelling 7.2.5(ix) dat

$$\operatorname{dist}(p,M) = \operatorname{dist}(p,y) = \operatorname{dist}(q,p) \cdot \sin\angle(r,p-q) = \frac{\|r \times (p-q)\|}{\|r\|}. \qquad \square$$

Lemma 7.5.6. *Zij p een punt in $\mathbb{R}^n$ en M een rechte met plaatsvector q en richtingsvector r. Veronderstel dat $p \notin M$. Dan is de loodlijn L vanuit p op M de rechte door de punten p en $q + \frac{r \cdot (p-q)}{\|r\|^2} r$. De afstand van p tot M is gegeven door*

$$\operatorname{dist}(p,M) = \frac{\sqrt{\|r\|^2\,\|p-q\|^2 - \big(r \cdot (p-q)\big)^2}}{\|r\|}.$$

Bewijs. We passen opnieuw Stelling 7.5.3 toe. We hebben $M = q + M_0$, met $M_0 = \mathbb{R}r$, en we gebruiken opnieuw Lemma 4.2.9(ii). Hieruit halen we

$$y := q + \operatorname{proj}_{M_0}(p-q) = q + \left((p-q) \cdot \frac{r}{\|r\|} \right) \frac{r}{\|r\|} = q + \frac{r \cdot (p-q)}{\|r\|^2} r.$$

Ten slotte vinden we

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(p, M) &= \operatorname{dist}(p, y) \\
&= \left\| q - p + \frac{r \cdot (p-q)}{\|r\|^2} r \right\| \\
&= \sqrt{\|q-p\|^2 + \left(\frac{r \cdot (p-q)}{\|r\|^2} \right)^2 \|r\|^2 + 2 \frac{r \cdot (p-q)}{\|r\|^2} (q-p) \cdot r} \\
&= \frac{\sqrt{\|r\|^2 \|p-q\|^2 - \big(r \cdot (p-q)\big)^2}}{\|r\|} . \qquad \square
\end{aligned}$$

Opmerking 7.5.7. In het geval $n = 3$ herleidt de formule uit Lemma 7.5.6 zich tot deze uit Lemma 7.5.5 door middel van de identiteit van Lagrange; zie Stelling 7.2.5(viii).

In de drie-dimensionale Euclidische ruimte $\mathbb{R}^3$ hebben twee niet-parallelle (hyper)vlakken de bijzondere eigenschap dat ze snijden in een rechte, waarvan de richting dus bepaald is door één vector. We vinden die vector als volgt terug:

Lemma 7.5.8. *Zij H en H' twee niet-parallelle vlakken in $\mathbb{R}^3$, met respectieve normaalvectoren $\mathfrak{n}$ en $\mathfrak{n}'$. Dan is $H \cap H'$ een rechte met richtingsvector $\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}'$.*

Bewijs. Aangezien H en H' niet parallel zijn aan elkaar, snijden ze noodzakelijk in een rechte $L = H \cap H'$. Omdat $\mathfrak{n} \perp H$, is in het bijzonder $\mathfrak{n} \perp L$, en analoog $\mathfrak{n}' \perp L$. Aangezien ook $\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}'$ orthogonaal staat op zowel $\mathfrak{n}$ als $\mathfrak{n}'$, en de richting van $\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}'$ uniek bepaald is door deze eigenschap (zie Opmerking 7.2.6(ii)), volgt hieruit dat $\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}' \parallel L$. $\square$

Ten slotte beschouwen we de situatie waarin twee rechten in $\mathbb{R}^3$ elkaar kruisen, d.w.z. ze zijn noch parallel, noch snijdend. Een *gemeenschappelijke loodlijn* is een rechte die deze twee rechten loodrecht snijdt. We tonen aan dat een dergelijke gemeenschappelijke loodlijn bestaat en uniek is, en we bepalen de vergelijking ervan. Dit zal ons ook in staat stellen om de afstand tussen twee kruisende rechten te bepalen.

Lemma 7.5.9. *Beschouw twee kruisende rechten L en M in $\mathbb{R}^3$. Dan is er een unieke rechte N die zowel L als M orthogonaal snijdt. Als L en M gegeven zijn door*

$$\begin{aligned}
L &= \{p + \lambda r \mid \lambda \in \mathbb{R}\} , \\
M &= \{q + \lambda s \mid \lambda \in \mathbb{R}\} ,
\end{aligned}$$

dan heeft N richtingsvector $r \times s$, en de snijpunten van N met L en M zijn respectievelijk gegeven door

$$y = p + \frac{(q-p)\cdot\big(s \times (r \times s)\big)}{\|r \times s\|^2}\, r \qquad \textit{en}$$
$$z = q + \frac{(q-p)\cdot\big(r \times (r \times s)\big)}{\|r \times s\|^2}\, s\,.$$

Bovendien is de afstand van L tot M gelijk aan

$$\operatorname{dist}(L, M) = \operatorname{dist}(y, z) = \frac{|(q-p)\cdot(r \times s)|}{\|r \times s\|}\,.$$

Bewijs. Aangezien L en M respectieve richtingsvectoren r en s hebben, waarbij r en s lineair onafhankelijk zijn omdat L en M niet parallel zijn, moet een gemeenschappelijke loodlijn in elk geval richtingsvector $u = r \times s$ ($\neq 0$) hebben.

Beschouw nu het vlak α door L en parallel met u, en het vlak β door M en parallel met u. Merk op dat α richtingsvectoren r en u heeft, en dat β richtingsvectoren s en u heeft. Omdat $\{r, s, u\}$ een basis is, volgt hieruit dat $\alpha \nparallel \beta$, en dus is $\alpha \cap \beta$ een rechte, die uiteraard u als richtingsvector heeft, en die zowel L als M snijdt. Omgekeerd moet elke gemeenschappelijke loodlijn van L en M bevat zijn in zowel α als β, en dit toont dus aan dat $\alpha \cap \beta$ de unieke gemeenschappelijke loodlijn N van L en M is.

We zoeken nu een expliciete vergelijking voor α. Omdat α richtingsvectoren r en $r \times s$ heeft, is een normaalvector van α gegeven door $n_\alpha = r \times (r \times s)$. We kunnen dus α voorstellen door de vectorvergelijking

$$\alpha = \big\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid (v-p)\cdot\big(r \times (r \times s)\big) = 0 \big\}\,. \tag{7.4}$$

Het snijpunt z van N met M is nu precies gelijk aan $\alpha \cap M$. We beschouwen dus een punt $z = q + \lambda s$ van M, en we drukken uit dat $z \in \alpha$. We bekomen

$$\lambda = \frac{(p-q)\cdot\big(r \times (r \times s)\big)}{s \cdot \big(r \times (r \times s)\big)}\,.$$

Stelling 7.2.5(i) en (v) leert ons dat

$$s \cdot \big(r \times (r \times s)\big) = (s \times r)\cdot(r \times s) = -\|r \times s\|^2\,,$$

en we bekomen de gezochte uitdrukking voor het punt z. Op analoge wijze bekomen we de uitdrukking voor het snijpunt y van N met L.

Ten slotte berekenen we de afstand $\text{dist}(L, M)$. De kortste afstand tussen een punt van L en een punt van M is duidelijkerwijze gegeven door de afstand langs de gemeenschappelijke loodlijn, dus $\text{dist}(L, M) = \text{dist}(y, z)$. In principe kan men via de gevonden uitdrukkingen voor y en z nu $\text{dist}(y, z)$ berekenen. Een efficiëntere methode gaat als volgt. We kunnen de vector $q-p$ opsplitsen in een stuk langs L, een stuk langs N en een stuk langs M. Meer bepaald schrijven we $q - p = (q - z) + (z - y) + (y - p)$, en merk op dat $(q - z) \cdot (r \times s)$ en $(y - p) \cdot (r \times s)$ beide 0 zijn. Bijgevolg is

$$(q - p) \cdot (r \times s) = (z - y) \cdot (r \times s) \,.$$

Schrijf nu $z - y = \lambda(r \times s)$, en gebruik de gelijkheid in de Ongelijkheid van Cauchy–Schwarz (Stelling 4.1.7); dan vinden we

$$\text{dist}(y, z) = \|z - y\| = \frac{|(z - y) \cdot (r \times s)|}{\|r \times s\|} = \frac{|(q - p) \cdot (r \times s)|}{\|r \times s\|} \,,$$

en we vinden de gezochte formule terug. □

Opmerking 7.5.10. Indien we geïnteresseerd zijn in een expliciete vergelijking voor N, kunnen we zeer eenvoudig te werk gaan door N te beschrijven als de doorsnede van de vlakken α en β die we in het bewijs hebben gebruikt. Stel zoals gewoonlijk $p = (p_1, p_2, p_3)^t$, en analoog voor q, r en s. Uit vergelijking (7.4) volgt dat α bestaat uit de vectoren $(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3$ die voldoen aan de vergelijking

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 & z - p_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_2 s_3 - r_3 s_2 & r_3 s_1 - r_1 s_3 & r_1 s_2 - r_2 s_1 \end{vmatrix} = 0 \,,$$

en analoog bestaat β uit de vectoren $(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3$ die voldoen aan

$$\begin{vmatrix} x - q_1 & y - q_2 & z - q_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ r_2 s_3 - r_3 s_2 & r_3 s_1 - r_1 s_3 & r_1 s_2 - r_2 s_1 \end{vmatrix} = 0 \,.$$

We kunnen nu de gemeenschappelijke loodlijn N omschrijven als de verzameling van vectoren $(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3$ die aan beide vergelijkingen voldoen.

7.6 De Euclidische groep $\mathsf{E}(n)$

In deze laatste paragraaf van dit hoofdstuk besteden we aandacht aan de isometrieën van de Euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$.

Definitie 7.6.1. (i) Beschouw de Euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$. Een *isometrie* van $\mathbb{R}^n$ is een bijectieve afbeelding φ van $\mathbb{R}^n$ naar zichzelf die de afstand bewaart, i.e. $\mathrm{dist}(\varphi(v), \varphi(w)) = \mathrm{dist}(v, w)$ voor alle $v, w \in \mathbb{R}^n$.

(ii) De verzameling van alle isometrieën van $\mathbb{R}^n$ vormt een groep (met de samenstelling als bewerking), die we de *isometriegroep* van $\mathbb{R}^n$ noemen; dit wordt ook de *Euclidische n-dimensionale groep* genoemd, en we noteren deze groep als $\mathsf{E}(n)$ of $\mathsf{ISO}(n)$.

(iii) Voor elke $v \in \mathbb{R}^n$ beschouwen we de afbeelding

$$T_v \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : w \mapsto w + v\,.$$

Het is duidelijk dat $T_v \in \mathsf{E}(n)$, en dat de verzameling

$$\mathsf{T}(n) := \{T_v \mid v \in \mathbb{R}^n\}$$

een deelgroep vormt van $\mathsf{E}(n)$. We noemen de elementen T_v *translaties* van $\mathbb{R}^n$, en de deelgroep $\mathsf{T}(n)$ de *translatiegroep* van $\mathbb{R}^n$.

Merk op dat isometrieën niet noodzakelijk lineair zijn.

Lemma 7.6.2. *Zij $Q \in \mathsf{O}(n)$. Dan is $\varphi := L_Q \in \mathsf{E}(n)$.*

Bewijs. Voor alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ hebben we

$$\varphi(v) \cdot \varphi(w) = Qv \cdot Qw = (Qv)^t(Qw) = v^tQ^tQw = v^tw = v \cdot w\,,$$

en dus bewaart φ het inproduct. Hieruit volgt dat φ ook de afstand bewaart. Aangezien Q inverteerbaar is, is φ bijectief. □

Stelling 7.6.3. *Zij $\mathsf{E}_0(n)$ de verzameling van de elementen van $\mathsf{E}(n)$ die de oorsprong 0 vasthouden. Dan is*

(1) $\mathsf{E}_0(n) = \mathsf{O}(n)$ *(waarbij we L_Q identificeren met Q),*

(2) $\mathsf{E}(n) = \mathsf{T}(n)\mathsf{O}(n)$.

Bewijs. (i) Uit het voorgaande lemma volgt dat $\mathsf{O}(n) \subseteq \mathsf{E}_0(n)$. We tonen aan dat ook $\mathsf{E}_0(n) \subseteq \mathsf{O}(n)$.

Zij $\varphi \in \mathsf{E}_0(n)$. Aangezien φ de afstand bewaart en 0 fixeert, bewaart het ook de norm. Uit de relatie $v \cdot w = \frac{1}{2}\big(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\big)$ volgt dan dat φ ook het inproduct bewaart. Hieruit volgt dan op zijn beurt dat φ ook de hoeken bewaart.

We tonen vervolgens aan dat φ een lineaire afbeelding is. Stel dus $v, w \in \mathbb{R}^n$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, en beschouw $u = \varphi(\lambda v + \mu w) - \lambda\varphi(v) - \mu\varphi(w)$. We moeten aantonen dat $u = 0$, en omdat φ surjectief is en het inproduct niet-ontaard is (zie Lemma 4.1.2), volstaat het hiertoe om aan te tonen dat $u \cdot \varphi(z) = 0$ voor alle $z \in \mathbb{R}^n$. Door gebruik te maken van de bilineariteit van het inproduct, evenals het feit dat φ het inproduct bewaart, vinden we

$$\begin{aligned} u \cdot \varphi(z) &= \varphi(\lambda v + \mu w) \cdot \varphi(z) - \lambda\varphi(v) \cdot \varphi(z) - \mu\varphi(w) \cdot \varphi(z) \\ &= (\lambda v + \mu w) \cdot z - \lambda v \cdot z - \mu w \cdot z \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Dus $\varphi \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$. Aangezien φ zowel afstand als hoeken bewaart, zal φ elke orthonormale basis afbeelden op een orthonormale basis. Hieruit volgt nu, via een redenering die analoog is aan die in Stelling 5.2.8, dat $\varphi \in \mathsf{O}(n)$.

(ii) Zij $\varphi \in \mathsf{E}(n)$, en stel $\varphi(0) = v$. Beschouw dan de translatie $T_{-v} = T_v^{-1}$; deze zal v afbeelden op 0, zodat de samenstelling $T_v^{-1} \circ \varphi$ de oorsprong 0 zal vasthouden. Dus $T_v^{-1} \circ \varphi \in \mathsf{E}_0(n) = \mathsf{O}(n)$, en bijgevolg

$$\varphi \in T_v \cdot \mathsf{O}(n) \subset \mathsf{T}(n)\mathsf{O}(n)\,. \qquad \square$$

Opmerking 7.6.4. Aangezien $\mathsf{T}(n) \cap \mathsf{O}(n) = 1$, zal elk element van $\mathsf{E}(n)$ op unieke wijze te schrijven zijn als het product van een element van $\mathsf{T}(n)$ en een element van $\mathsf{O}(n)$. Samen met nog een aantal andere groepentheoretische eigenschappen levert dit dat de groep $\mathsf{E}(n)$ een zogenaamd *semidirect product* is van de groepen $\mathsf{O}(n)$ en $\mathsf{T}(n)$.

Definitie 7.6.5. (i) Zij $\varphi \in \mathsf{E}(n)$, en schrijf $\varphi = T_v\varphi_0$, waarbij $\varphi_0 \in \mathsf{E}_0(n) = \mathsf{O}(n)$ uniek bepaald is door φ. Aangezien $\varphi_0 \in \mathsf{O}(n)$, is $\det \varphi_0 \in \{1, -1\}$. Als $\det \varphi_0 = 1$, noemen we φ een *directe isometrie* of een *verplaatsing* (soms ook *starre verplaatsing* of *starre beweging* genoemd, vooral in de mechanica van starre lichamen); als $\det \varphi_0 = -1$, noemen we φ een *indirecte isometrie.*

(ii) De verzameling van alle directe isometrieën van $\mathbb{R}^n$ vormt een deelgroep van $\mathsf{E}(n)$ die we als $\mathsf{E}^+(n)$ noteren, en de *verplaatsingsgroep* van $\mathbb{R}^n$ noemen.

Opmerking 7.6.6. Uit Stelling 7.6.3(ii) volgt dat $\mathsf{E}^+(n) = \mathsf{T}(n)\mathsf{SO}(n)$.

Index

Notaties